Régularité maximale et Équations de Navier-Stokes

Sylvie Monniaux

1er décembre 2006

Table des matières

Introduction

Le cadre de ma recherche est l'analyse fonctionnelle appliquée aux équations aux dérivées partielles. Plus précisément, j'ai travaillé sur le problème de régularité maximale de la solution du problème de Cauchy lorsque celui-ci est bien posé, dans le cas autonome (cas commutatif) puis dans le cas non autonome (cas non commutatif). Pour plus de précisions quant aux notions utilisées ici, on se reportera à l'introduction du premier chapitre, ainsi qu'aux résultats présentés dans le Chapitre 1.

L'autre partie de mes travaux concerne les équations de Navier-Stokes. J'ai d'abord appliqué des résultats de régularité maximale au problème d'unicité des solutions « à la Kato »(solutions dites intégrales) dans des domaines réguliers, puis dans des domaines non réguliers (à bord lipschitzien). Ensuite, je me suis intéressée au problème de l'existence de ces solutions dans des domaines lipschitziens. Cela m'a conduit à étudier l'analyticité du semi-groupe de Stokes sur les espaces L^p dans des domaines non réguliers.

La présentation est chronologique. L'ordre est celui de la parution de mes travaux que l'on trouvera dans la bibliographie.

Dans un premier chapitre, j'expose le problème de la régularité maximale, d'abord dans le cas autonome, puis dans le cas non autonome. Les travaux présentés ici ont été écrits entre 1994 et 1998. Sur ce sujet, les publications sont, dans l'ordre chronologique, [39], [46], [40], [41], [47], [23], [25] et [24].

Dans un deuxième chapitre, je m'intéresse aux équations de Navier-Stokes, tant au point de vue de l'existence (dans [45], [37] et [36]) que de l'unicité des solutions (dans [42], [43] et [44]) dites intégrales. Ceci constitue mon thème de recherche depuis 1999.

Volontairement, je ne parlerai pas dans ce mémoire de [3] qui se situe un peu à part du sujet général traité ici. Les résultats de [3] proviennent pour une part de mon mémoire de DEA soutenu en juin 1993.

Enfin, dans un dernier court chapitre, je donne quelques pistes de recherche plus ou moins avancées sur des problèmes connexes à ce qui précède. Les idées présentées se basent sur l'article [35].

On trouvera à la fin de ce mémoire des annexes composées de mes différents articles cités ici.

Chapitre 1

Régularité maximale

1.1 Introduction

Dans un premier temps, je me suis intéressée au problème de régularité maximale L^p suivant.

Étant donnés un réel $T > 0$, un opérateur linéaire A sur un espace de Banach X, $p \in]1, \infty[$, existe-t-il, pour toute fonction $f \in L^p(0, T; X)$, une fonction $u \in W^{1,p}(0, T; X) \cap L^p(0, T; D(A))$ solution du problème

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \quad t \in [0, T], \qquad u(0) = 0 \tag{1.1}$$

au sens de $L^p(0, T; X)$? La réponse positive à cette question est appelée propriété de régularité maximale L^p et est notée dans la suite $MR(p, X)$.

La question porte sur trois aspects : on cherche les propriétés portant sur l'espace de Banach X, l'opérateur A et/ou le réel $p \in]1, \infty[$ qui assurent la propriété de régularité maximale.

Une condition nécessaire pour que l'opérateur A vérifie $MR(p, X)$ est que le semi-groupe engendré soit analytique sur X. Voir par exemple l'article de G. Dore [16]

En 1964, Sobolevski a montré que pour un espace de Banach quelconque, la propriété $MR(p, X)$ est indépendante de $p \in]1, \infty[$ dès que l'opérateur A engendre un semi-groupe analytique.

D'autre part, De Simon en 1964 [12] a montré que pour des opérateurs qui engendrent un semi-groupe analytique, la propriété $MR(p, X)$ est toujours vraie si X est un espace de Hilbert.

La question formulée par H. Brézis en 1985 est de savoir s'il existe des conditions sur l'espace X pour que $MR(p, X)$ ait lieu quel que soit l'opérateur A dès que $-A$ est le générateur d'un semi-groupe fortement continu (analytique) $\{e^{-tA}, t \geq 0\}$.

Si on se restreint à des espaces du type $X = L^q(\Omega; Y)$ ($q \in]1, \infty[$), Coulhon et Lamberton ont montré en 1986 [11], en utilisant le semi-groupe de Poisson, qu'il était nécessaire que Y soit UMD (voir la définition et la caractérisation plus loin), et donc X aussi.

En 1987, Lamberton dans [32] a montré en utilisant des méthodes de transférence, dilatation et interpolation que si le semi-groupe $\{e^{-tA}, t \geq 0\}$ agit sur tous les espaces L^p, est contractant sur L^1 et sur L^∞, analytique borné sur L^2, alors on a la propriété de régularité maximale L^p sur tous les espaces L^q.

Le problème de Brézis a été résolu par N. Kalton et G. Lancien en 2000 dans [29] ; la réponse est que X est « essentiellement » un espace de Hilbert.

On peut remarquer qu'il y a trois approches possibles du problème de régularité maximale L^p.

1. La solution faible u de (1.1) est donnée par $u(t) = \int_0^t e^{-(t-s)A} f(s) ds$ pour presque tout $t \in [0, T]$. Pour que la propriété $MR(p, X)$ soit vérifiée, il faut et il suffit de montrer que l'opérateur R : $f \mapsto Au(\cdot)$ est borné sur $L^p(0, T; X)$. Comme $-A$ engendre un semi-groupe analytique, on a $\|Ae^{-tA}\| \leq \frac{c}{t}$ pour $t > 0$. Ainsi, R est donné par une intégrale singulière.

2. On peut aussi considérer le problème comme l'inversibilité d'une somme de deux opérateurs. On note par $\mathcal{B}$ l'opérateur défini par $\mathcal{B}u = u'$ sur son domaine $D(\mathcal{B}) = \{u \in W^{1,p}(0,T;X); u(0) = 0\}$ et par $\mathcal{A}$ l'opérateur défini par son domaine $D(\mathcal{A}) = L^p(0,T;D(A))$ et $(\mathcal{A}u)(t) = Au(t)$ pour presque tout $t \in [0,T]$. Il est facile de voir que la propriété $MR(p,X)$ est équivalente à l'inversibilité dans $L^p(0,T;X)$ de $\mathcal{A}+\mathcal{B}$, de domaine $D(\mathcal{A}) \cap D(\mathcal{B})$.
3. La troisième méthode, la plus récente, consiste à remarquer que la régularité maximale L^p est équivalente à la $R-$bornitude de la famille $\{is(is+A)^{-1},\ s \in \mathbb{R}\}$. Ce résultat est dû à L. Weis en 2001 [54]. Je n'ai pas exploité cette caractérisation, postérieure à mes travaux dans ce domaine.

La première approche est celle utilisée par De Simon. La deuxième approche a été utilisée par Dore et Venni en 1987 [17] pour montrer que si l'opérateur A a des puissances imaginaires bornées (avec restriction de croissance sur les puissances imaginaires) sur un espace de Banach X possédant la propriété UMD, alors la régularité maximale $MR(p,X)$ est vérifiée. La question est alors de savoir si la propriété UMD est nécessaire. En 1998, Hieber et Prüß [26] (ainsi que Coulhon et Duong dans [10]) ont montré, en utilisant des techniques d'intégrales singulières, que dans le cas de semi-groupes à noyaux de chaleur vérifiant de « bonnes » estimations (du type estimations gaussiennes) sur des espaces $L^q(\Omega)$, alors la propriété $MR(p,L^q(\Omega))$ a lieu pour tout $p,q \in]1,\infty[$.

1.2 Le cas autonome

Dans la première partie de ma thèse [39], je me suis intéressée aux opérateurs ayant des puissances imaginaires bornées (BIP : « bounded imaginary powers ») utilisés par Dore et Venni dans [17] afin de montrer l'inversibilité de la somme de deux opérateurs, liée au problème de la régularité maximale du problème de Cauchy autonome.

1.2.1 Générateur analytique de groupe

J'ai fait le lien entre les opérateurs BIP et les générateurs analytiques de groupes fortement continus introduits par Ciorănescu et Zsidó en 1976 dans [9]. Ce lien produit une démonstration simple du théorème de Dore-Venni. Les résultats exposés ici se trouvent essentiellement dans [41].

Définition 1.1 (voir [30])**.** On dit qu'un opérateur (linéaire, non borné) A sur un espace de Banach X est sectoriel s'il est fermé, à domaine $D(A)$ dense dans X de noyau $N(A)$ réduit à $\{0\}$, d'image $R(A)$ dense dans X et si son ensemble résolvant $\rho(A)$ contient le demi-axe $]-\infty,0[$ tel que

$$M_0 := \sup_{t>0} \|t(t+A)^{-1}\| < \infty.$$

Il est facile de voir que si A est sectoriel sur X, alors il existe un angle $\varphi \in]0,\pi]$ tel que

$$\rho(-A) \supset \Sigma_\omega := \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg(\lambda)| < \omega\}$$

et $\sup\limits_{\lambda\in\Sigma_\omega} \|\lambda(\lambda+A)^{-1}\| < \infty$. L'angle spectral φ_A de A vaut $\varphi_A = \pi - \sup\omega$.

Pour un opérateur sectoriel A, on peut définir ses puissances complexes A^z pour $|\Re(z)| < 1$ pour $x \in D(A) \cap R(A)$ par

$$A^z x = \frac{\sin \pi z}{\pi}\left(\frac{x}{z} - \frac{1}{1+z}A^{-1}x + \int_0^1 t^{z+1}(t+A)^{-1}A^{-1}x dt + \int_1^\infty t^{z-1}(t+A)^{-1}Ax dt\right).$$

Définition 1.2 (voir [17])**.** On dit qu'un opérateur A admet des puissances imaginaires bornées (on note $A \in BIP$) s'il est sectoriel et si la fermeture de $(A^{is}, D(A) \cap R(A))$ définit un opérateur borné sur X pour tout $s \in \mathbb{R}$ et que l'on a $\sup\limits_{s\in[-1,1]} \|A^{is}\| < \infty$.

Pour $A \in BIP$, la famille $\{A^{is}, s \in \mathbb{R}\}$ forme un groupe fortement continu sur X.

Les espaces de Banach possédant la propriété UMD (pour « unconditional martingale difference ») occupent une place importante de mon travail. Ce qui nous intéresse est que la transformation de

Hilbert $\mathcal{H}$ est dans ce cas bornée sur $L^p(\mathbb{R}; X)$ pour tout $p \in]1, \infty[$. On pourra se reporter par exemple à [7] et [6], voir aussi [8] pour une référence plus récente. On rappelle que $\mathcal{H}$ est définie (formellement) pour $f \in L^p(\mathbb{R}; X)$ par

$$\mathcal{H}f(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{s}\, f(t-s)\, ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

L'idée dans [41] était de considérer le problème inverse : soit $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ un groupe fortement continu sur un espace de Banach X (ayant la propriété UMD), existe-t-il un opérateur $A \in BIP$ tel que $A^{is} = U(s)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$? La réponse à cette question nécessite de développer la notion de générateur analytique de groupe.

Définition 1.3 (voir [9])**.** Soit $\mathcal{U} = (U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ un groupe fortement continu sur un espace de Banach X. L'extension analytique de $\mathcal{U}$ est la famille d'opérateurs non bornés $(C_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{C}}$ définis par

$$\begin{array}{rcl} D(C_\alpha) & = & \{x \in X; \exists f_x \in Hol(\Omega_\alpha) \cap \mathscr{C}(\overline{\Omega}_\alpha) : f_x(is) = U(s)x,\ \forall s \in \mathbb{R}\} \\ C_\alpha x & = & f_x(\alpha), \quad x \in D(C_\alpha), \end{array}$$

où $\Omega_\alpha = \{z \in \mathbb{C}; 0 < \Re(z) < \Re(\alpha)\}$ si $\Re(\alpha) > 0$ et $\Omega_\alpha = \{z \in \mathbb{C}; \Re(\alpha) < \Re(z) < 0\}$ si $\Re(\alpha) < 0$. L'opérateur C_1, que l'on notera aussi par la suite C, est appelé générateur analytique de $\mathcal{U}$.

Exemple 1.4. Soit A un opérateur sectoriel admettant des puissances imaginaires bornées sur un espace de Banach X. Alors le générateur analytique du groupe $(A^{is})_{s\in\mathbb{R}}$ est A.

Le théorème principal de [41] (Theorem 4.3) est une réciproque de l'exemple précédent dans le cas d'espaces de Banach UMD. Il est cité ci-dessous, sa preuve peut être trouvée dans [41], parties 3 et 4.

Théorème I. *Si l'espace de Banach X a la propriété UMD, alors le générateur analytique C d'un groupe fortement continu $\mathcal{U} = (U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ vérifiant*

$$\limsup_{|s|\to\infty} \frac{\ln \|U(s)\|}{|s|} < \pi$$

est sectoriel, admet des puissances imaginaires bornées et vérifie $C^{is} = U(s)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

Le théorème de Dore-Venni apparaît alors comme un corollaire immédiat de ce théorème.

Corollaire II. *Soient A et B les générateurs analytiques de groupes fortement continus $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sur un espace de Banach X possédant la propriété UMD. On suppose que $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ commutent et vérifient*

$$\limsup_{|s|\to\infty} \frac{\ln \|U(s)\|}{|s|} + \limsup_{|s|\to\infty} \frac{\ln \|V(s)\|}{|s|} < \pi.$$

Alors, si B est inversible, l'opérateur $(A + B, D(A) \cap D(B))$ est fermé, inversible sur X.

Preuve. En notant $W(s) = U(s)V(-s)$ pour $s \in \mathbb{R}$, on définit un groupe $\mathcal{W}$ fortement continu sur X de générateur analytique AB^{-1} de domaine $\{x \in X; B^{-1}x \in D(A)\}$. D'après le Théorème I, cet opérateur est sectoriel. Donc en particulier, $-1 \in \rho(AB^{-1})$ et $(1 + AB^{-1})^{-1} = B(A + B)^{-1}$ est borné sur X. $\square$

1.2.2 Perturbations des opérateurs BIP

Il est intéressant de connaître l'influence d'une perturbation (bornée) sur un opérateur qui admet des puissances imaginaires bornées. Ceci a été étudié par Prüß et Sohr dans [50] en utilisant des outils tels que la transformée de Mellin. Dans [40], j'ai généralisé le résultat de [50] ; la méthode consiste à exploiter un calcul fonctionnel pour les opérateurs sectoriels dû en particulier à A. M^{c}Intosh.

Pour un opérateur A sectoriel d'angle spectral φ_A (voir Définition 1.1) sur un espace de Banach X, on définit $f(A)$ pour

$$f \in \mathcal{H}_0^\infty(\Sigma_\mu) = \{f : \Sigma_\mu \to \mathbb{C} \text{ holomorphe bornée } ; \exists \alpha : z \mapsto (z^\alpha + z^{-\alpha})f(z) \text{ holomorphe bornée sur } \Sigma_\mu\}$$

si $\mu > \varphi_A$, de la manière suivante pour $x \in X$

$$f(A)x = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Sigma_\vartheta} f(z)(z-A)^{-1}x\,dz$$

pour $\vartheta \in]\varphi_A, \mu[$. Cette définition est indépendante du choix de $\vartheta \in]\varphi_A, \mu[$. Pour une fonction g holomorphe bornée sur un secteur Σ_μ, on définit $g(A)$ sur $D(A) \cap R(A)$ par $g(A)x = f(A)(A^{-1}x + 2x + Ax)$ où $f(z) = \frac{z}{(1+z)^2}g(z)$ (dans ce cas, $f \in \mathcal{H}_0^\infty(\Sigma_\mu)$).

Définition 1.5. On dit qu'un opérateur A admet un calcul fonctionnel $\mathcal{H}^\infty-$borné si la fermeture de l'opérateur $(g(A), D(A) \cap R(A))$ est bornée sur X pour tout g holomorphe bornée sur Σ_μ, pour tout $\mu > \varphi_A$.

En utilisant ce calcul fonctionnel, on obtient le théorème suivant (Theorem 2.4 et Corollary 2.5 de [40])

Théorème III. *Soit A un opérateur sectoriel sur un espace de Banach X, d'angle spectral φ_A, admettant des puissances imaginaires bornées. Soit B un opérateur borné et inversible d'angle spectral φ_B et qui commute avec les resolvantes de A. Si $\varphi_A + \varphi_B < \pi$, alors l'opérateur $A + B$ défini sur le domaine $D(A)$ admet des puissances imaginaires bornées sur X.*

1.3 Le cas non autonome

La deuxième partie de ma thèse consiste en l'étude de la version non commutative du théorème de Dore-Venni . Appliqué au problème de Cauchy non autonome, ceci permet de montrer des résultats de régularité maximale. Ceci a été mon thème de recherche jusqu'en 1998.

1.3.1 Théorème de type Dore-Venni non commutatif

Il s'agit ici de présenter une version du Corollaire II dans le cas où les opérateurs A et B ne commutent pas. Cela permet de traiter des problèmes de Cauchy non autonomes du type

$$u'(t) + A(t)u(t) = f(t), \quad t \in [0,T], \quad u(0) = 0. \tag{1.2}$$

On ne peut espérer pouvoir traiter tous les cas ci-dessus pour des opérateurs $A(t)$ quelconques, une certaine condition de continuité en t de la famille $\{A(t), t \in [0,T]\}$ est nécessaire. Avec Jan Prüß, dans[46], nous avons utilisé une condition de commutativité dite de type d'Acquispace-Terreni (1.3) énoncée dans le théorème ci-dessous, résultat principal de [46] (Theorem 1).

Théorème IV. *Soient A et B des opérateurs admettant des puissances imaginaires bornées sur un espace de Banach X possédant la propriété UMD. On suppose que pour*

$$\vartheta_A := \limsup_{|s|\to\infty} \frac{\ln \|A^{is}\|}{|s|}, \quad \vartheta_B := \limsup_{|s|\to\infty} \frac{\ln \|B^{is}\|}{|s|},$$

on a $\vartheta_A + \vartheta_B < \pi$. On suppose aussi que A est inversible et qu'il existe $c > 0$, $0 \le \alpha < \beta \le 1$ tels que

$$\|A(\lambda + A)^{-1}[A^{-1}(\mu + B)^{-1} - (\mu + B)^{-1}A^{-1}]\| \le \frac{c}{(1 + |\lambda|^{1-\alpha})\mu^{1+\beta}}, \tag{1.3}$$

pour tout $\lambda \in \Sigma_{\pi-\varphi_A}$, $\mu \in \Sigma_{\pi-\varphi_B}$, où $\varphi_A > \vartheta_A$ et $\varphi_B > \vartheta_B$ vérifient $\varphi_A + \varphi_B < \pi$. Alors, il existe $c_0 > 0$ tel que pour tout $c \in]0, c_0]$ dans la condition (1.3), l'opérateur $(A + B, D(A) \cap D(B))$ est fermé et inversible sur X.

Idée de la preuve. L'idée pour démontrer ce théorème est de construire un inverse à gauche et un inverse à droite pour $A + B$ en utilisant les opérateurs

$$S = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\mu + A)^{-1}(\mu - B)^{-1}d\mu \quad \text{et} \quad T = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\mu - B)^{-1}(\mu + A)^{-1}d\mu$$

où le contour Γ est choisi convenablement, de façon à être dans l'intersection des ensembles résolvants $\rho(B) \cap \rho(-A)$. On peut montrer facilement que

$$ASx + SBx = x \quad \text{pour tout } x \in D(B) \quad \text{et} \quad TAx + BTx = x \quad \text{pour tout } x \in D(A).$$

Ces opérateurs S et T peuvent être exprimés en fonction des puissances complexes de A et B : c'est là où l'hypothèse « A et B admettent des puissances imaginaires bornées »est utilisée. Grâce à la condition de commutativité (1.3), on montre que $SB - BT$ est borné. En ajoutant l'hypothèse UMD sur l'espace Xindexpropriété UMD on obtient que les opérateurs AS, SB, TA, BT sont bornés . Finalement, pour construire effectivement un inverse à gauche et un inverse à droite, il est nécessaire que la constante c dans (1.3) soit suffisament petite. On termine par montrer que ces deux inverses coïncident, et donc que $A + B$ est inversible. □

Ce théorème a plusieurs conséquences. En particulier,

Corollaire V. *Sous les hypothèses du théorème précédent, l'opérateur $A+B$ est sectoriel d'angle spectral inférieur ou égal à* $\max\{\varphi_A, \varphi_B\}$.

Le Théorème IV s'applique à des équations d'évolution du type (1.2). En effet, on peut remarquer que sur $X = L^p(0, T; Y)$ où $p \in]1, \infty[$ et Y est un espace de Banach ayant la propriété UMD (X vérifie alors la propriété UMD), l'opérateur B, défini sur son domaine $D(B) = \{u \in W^{1,p}(0, T; X); u(0) = 0\}$ par $(Bu)(t) = u'(t)$ pour presque tout $t \in]0, T[$, est sectoriel et admet des puissances imaginaires bornées avec $\varphi_B = \frac{\pi}{2}$ avec les notations du Théorème IV. On a alors le résultat suivant (Theorem 2 de [46]).

Corollaire VI. *Pour $t \in [0, T]$, on considère des opérateurs $A(t)$ sur un espace de Banach Y qui possède la propriété UMD. On suppose que ces opérateurs sont inversibles, uniformément sectoriels sur Y (on note φ_A l'angle spectral uniforme) et admettent des puissances imaginaires bornées, les constantes pouvant être choisies uniformes par rapport à t. On suppose de plus qu'on a la condition de régularité suivante (dite de Labbas-Terreni) pour la famille $\mathcal{A} = \{A(t), t \in [0, T]\}$: il existe des constantes $\alpha \in [0, 1[$, $\delta \in]0, 1]$ et $c > 0$ telles que*

$$\|A(t)(\lambda + A(t))^{-1}[A(t)^{-1} - A(s)^{-1}]\| \leq \frac{c|t - s|^\delta}{1 + |\lambda|^{1-\alpha}}, \quad t, s \in [0, T],\ \lambda \in \Sigma_{\pi - \varphi_A}. \tag{1.4}$$

Alors pour tout $f \in L^p(0, T; Y)$, il existe une unique solution $u \in W^{1,p}(0, T; Y)$ de (1.2) telle que $t \mapsto A(t)u(t) \in L^p(0, T; Y)$. On dit alors que la famille $\mathcal{A}$ admet la propriété de régularité maximale $MR(p, Y)$.

Preuve. Il suffit d'appliquer le Théorème IV aux opérateurs A et B définis de la façon suivante : B est l'opérateur de dérivation décrit plus haut et A a pour domaine

$$D(A) = \{u \in L^p(0, T; Y); u(t) \in D(A(t)) \ p.p. \text{ et } t \mapsto A(t)u(t) \in L^p(0, T; Y)\}$$

et prend les valeurs $Au :]0, T[\ni t \mapsto A(t)u(t) \in Y$. On montre alors que la condition (1.4) sur la famille $\mathcal{A}$ implique (1.3) pour A et B. □

Remarque 1.6. La condition de Labbas-Terreni (1.4) autorise des opérateurs $A(t)$ de domaines variables avec t. En revanche, cette condition implique ($\lambda = 0$) de la régularité höldérienne sur $[0, T] \ni t \mapsto A(t)^{-1} \in \mathscr{L}(Y)$

Dans le cas d'opérateurs $A(t)$ à domaines constants, on pourra se reporter à [2], ainsi qu'à la thèse de César Poupaud [49].

Dans [47], on s'intéresse au problème (1.2) pour des conditions initiales non nulles. Plus précisément, on considère le problème d'évolution non autonome suivant

$$u'(t) + A(t)u(t) = 0,\ T \geq t \geq s \geq 0, \quad u(s) = x. \tag{1.5}$$

Le résultat principal de [47] (Proposition 8) s'énonce de la manière suivante.

Théorème VII. *Si la famille $\mathcal{A} = \{A(t), 0 \leq t \leq T\}$ vérifie les hypothèses du Corollaire VI, alors pour tout $s \in [0, T]$, pour tout $x \in D(A(s)$, il existe une unique solution classique u de (1.5), c'est-à-dire que*

$$u \in \mathscr{C}^1([s, T]; Y) \cap \{v \in \mathscr{C}([s, T]; Y); v(t) \in D(A(t)), A(\cdot)v(\cdot) \in \mathscr{C}([s, T]; Y)\}$$

et u vérifie $u'(t) + A(t)u(t) = 0$ pour $t \in [s, T]$ et $u(s) = x$ pour $s \in [0, T]$.

1.3.2 Régularité maximale non autonome pour des opérateurs à noyaux

Les résultats exposés ici ont été obtenus avec Matthias Hieber durant l'année 1998. Le premier résultat de cette partie, cf. [25], concerne le cas d'opérateurs pseudo-différentiels définis sur un espace de Hilbert. Ceci a été généralisé à des espaces UMD par Pierre Portal et Željko Štrkalj dans [48]. Ils utilisent pour cette généralisation la caractérisation de la régularité maximale par la $R-$bornitude de la famille des résolvantes due à L. Weis [54].

Le premier résultat que l'on trouvera dans [25] traite d'un opérateur pseudo-différentiel $Op(a)$ associé à un symbole $a \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, H)$, où H est un espace de Hilbert. Pour une fonction f dans l'espace de Schwartz des fonctions à décroissance rapide (noté $\mathscr{S}(\mathbb{R}, H)$), on note $\mathcal{F}(f)$ ou $\hat{f}$ sa transformée de Fourier définie par

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Pour $a \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, H)$, on définit l'opérateur pseudo-différentiel $Op(a)$ sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}, H)$ à valeur dans $\mathscr{C}_b(\mathbb{R}, H)$ (l'espace des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans H) par

$$Op(a)(u)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} a(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi, \quad x \in \mathbb{R}.$$

On a alors le théorème suivant ([25], Theorem 2.1).

Théorème VIII. *Soit $a \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, H)$ tel que l'application $\xi \mapsto a(x, \xi)$ admette une extension (à valeurs dans $\mathscr{L}(H)$, opérateurs bornés sur H) holomorphe dans $S_\theta = \{\pm z \in \mathbb{C}; |\arg(z)| < \theta\}$ pour un $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ vérifiant*

$$\sup_{z \in S_\theta} \sup_{x \in \mathbb{R}} \|a(x, z)\|_{\mathscr{L}(H)} < \infty.$$

Alors l'opérateur $Op(a)$ défini a priori sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}, H)$ s'étend en un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R}, H)$.

Le résultat suivant de [25] (Theorem 3.1) montre que la propriété $MR(p, X)$ (voir Corollaire VI) pour une famille d'opérateurs $\mathcal{A} = \{A(t), 0 \le t \le T\}$ est indépendante de p (comme c'est le cas dans le cas autonome) pour peu que cette famille vérifie une condition du type Labbas-Terreni.

Théorème IX. *Soit X un espace de Banach quelconque, $T > 0$. Supposons que $\mathcal{A} = \{A(t), t \in [0, T]\}$ soit une famille d'opérateurs uniformément sectoriels vérifiant* (1.4)*. On suppose qu'il existe $p \in]1, \infty[$ tel que $\mathcal{A}$ ait la propriété $MR(p, X)$. Alors la famille $\mathcal{A}$ a la propriété de régularité maximale $MR(q, X)$ pour tout $q \in]1, \infty[$.*

Idée de la preuve. La condition (1.4) implique une condition de type Hörmander pour l'opérateur S défini par

$$(Sf)(t) = \int_0^t A(t) e^{-(t-s)A(t)} f(s) ds, \quad t \in [0, T],$$

qui est la partie singulière de l'opérateur $f \mapsto A(\cdot)u(\cdot)$ pour u solution de (1.5). Le fait d'avoir S borné sur $L^p(0, T; X)$ pour un $p \in]1, \infty[$ implique alors que S est borné sur $L^q(0, T; X)$ pour tout $q \in]1, \infty[$. □

Le dernier résultat marquant de [25] (Theorem 3.2) est le suivant. Il est analogue au théorème de de Simon (voir dans l'introduction, [12]) dans le cas non autonome.

Corollaire X. *Soit H un espace de Hilbert quelconque, $T > 0$. Supposons que $\mathcal{A} = \{A(t), t \in [0, T]\}$ soit une famille d'opérateurs uniformément sectoriels vérifiant* (1.4)*. Alors la famille $\mathcal{A}$ a la propriété de régularité maximale $MR(p, H)$ pour tout $p \in]1, \infty[$.*

Idée de la preuve. Comme dans le cas autonome, les conditions du Théorème IX (famille d'opérateurs uniformément sectoriels vérifiant (1.4)) est suffisante si l'espace est de Hilbert. Pour montrer cela, on note a le symbole défini par

$$a(t, \tau) = \begin{cases} A(0)(i\tau + A(0))^{-1}, & t < 0, \\ A(t)(i\tau + A(t))^{-1}, & t \in [0, T], \\ A(T)(i\tau + A(T))^{-1}, & t > T. \end{cases}$$

On vérifie alors que a remplit les conditions du Théorème VIII, ce qui nous donne que la famille $\mathcal{A}$ vérifie $MR(2, H)$. On applique ensuite le Théorème IX pour montrer que la famille $\mathcal{A}$ vérifie $MR(p, H)$ pour tout $p \in]1, \infty[$. $\square$

Ces trois résultats théoriques sont appliqués dans le cas d'opérateurs à noyau de chaleur définis sur des espaces L^q dans [24]. On se propose de donner une démonstration dans le cas non autonome d'un résultat de Hieber et Prüß ([26]), en suivant la démonstration de Coulhon et Duong ([10]). On se place dans un espace de type homogène (Ω, m, d), c'est-à-dire que Ω est un ouvert, m est une mesure $\sigma-$finie sur Ω et d est une quasi-métrique sur Ω, *i.e.*

$$d(x,z) \leq \gamma_d(d(x,y) + d(y,z)), \quad x, y, z \in \Omega$$

$\gamma_d \geq 1$, possédant la propriété de doublement : il existe une constante $C_D \geq 1$ telle que

$$m(B_\Omega(x, 2r)) \leq C_D m(B_\Omega(x,r)), \quad x \in \Omega, \ r > 0,$$

où $B_\Omega(x,r) = \{y \in \Omega; d(x,y) < r\}$. Cette propriété de doublement implique en particulier qu'il existe des constantes $C_H \geq 1$ et $\ell > 0$ telles que pour tous $x \in \Omega$, $a \geq 1$ et $r > 0$, on a

$$m(B_\Omega(x, ar)) \leq C_H a^\ell m(B(x,r)).$$

On considère une famille d'opérateurs $\mathcal{A} = \{A(t), t \in [0,T]\}$ définis sur $L^2(\mathcal{M}, m)$ où $\mathcal{M}$ est un ouvert mesurable de Ω et $T > 0$. On suppose que les opérateurs $A(t)$, $t \in [0,T]$ sont uniforméments sectoriels sur $L^2(\mathcal{M}, m)$, ce qui implique que les opérateurs $-A(t)$ engendrent des semi-groupes uniformément analytiques bornés sur $L^2(\mathcal{M}, m)$. On suppose que pour tout $s > 0$, il existe des noyaux $k_t(s, \cdot, \cdot)$ mesurables, bornés sur $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ tels que

$$(e^{-sA(t)} f)(x) = \int_{\mathcal{M}} k_t(s,x,y) f(y) \, dm(y), \quad m - p.t. \ x \in \mathcal{M}$$

pour tout $f \in L^2(\mathcal{M}, m)$. On suppose de plus que ces noyaux vérifient une estimation uniforme de la forme suivante :
il existe une constante $n > 0$ et une fonction bornée décroissante g définie sur $]0, \infty[$ avec

$$\lim_{r \to \infty} r^{2\ell + \gamma} g(r) = 0$$

pour un $\gamma > 0$ telles que

$$|k_t(s,x,y)| \leq \min \left\{ m(B_\Omega(x, s^{\frac{1}{n}})^{-1}, m(B_\Omega(y, s^{\frac{1}{n}})^{-1} \right\} g\left(s^{-\frac{1}{n}} d(x,y) \right)$$

pour tout $t \in [0,T]$, $s > 0$ et pour $m-$presque tous $x, y \in \mathcal{M}$.
Cette condition implique que les semi-groupes $\{(e^{-sA(t)})_{s \geq 0}, t \in [0,T]\}$ agissent de manière consistante sur $L^q(\mathcal{M}, m)$ pour tout $q \in [1, \infty[$; on note $T_{q,t}(s))_{s \geq 0}$, $t \in [0,T]$, $q \in [1, \infty[$ ces semi-groupes. De plus, ces semi-groupes sont uniformément bornés analytiques sur $L^q(\mathcal{M}, m)$ pour tout $q \in [1, \infty[$: on note $-A_q(t)$ le générateur de $T_{q,t}(s))_{s \geq 0}$. On suppose que pour tout $q \in]1, \infty[$, la famille $\mathcal{A}_q = \{A_q(t), t \in [0,T]\}$ vérifie une condition de type Labbas-Terreni (voir (1.4)). On suppose de plus que pour $q = 1$ et $q = \infty$, on a aussi une condition de commutateur comme (1.4) en remplaçant le terme $A(t)(\lambda + A(t))^{-1}(A(t)^{-1} - A(s)^{-1})$ par $(\lambda + A(t))^{-1} - (\lambda + A(s))^{-1}$. Sous ces hypothèses, on a alors le théorème suivant (Theorem 1 de [24]).

Théorème XI. *Pour tout $q \in]1, \infty[$, la famille $\mathcal{A}_q = \{A_q(t), t \in [0,T]\}$ vérifie la propriété de régularité maximale $MR(p, L^q(\mathcal{M}, m))$ pour tout $p \in]1, \infty[$.*

Chapitre 2

Équations de Navier-Stokes

2.1 Introduction

Le système de Navier-Stokes incompressible s'écrit de la manière suivante

$$
\begin{array}{rcll}
\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v + \nabla p + (v \cdot \nabla) v & = & 0 & \text{dans }]0,\infty[\times \mathbb{R}^d \\
\nabla \cdot v & = & 0 & \text{dans }]0,\infty[\times \mathbb{R}^d \\
v(0) & = & v_0 & \text{dans } \mathbb{R}^d,
\end{array}
\tag{2.1}
$$

où v est la vitesse et p la pression du fluide considéré, v_0 étant la vitesse initiale ne dépendant que de la variable d'espace. En 1934, dans [34] J. Leray a montré l'existence globale de solutions faibles de (2.1) pour une condition initiale $v_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)^d$, avec la régularité $v \in L^\infty(0,\infty; L^2(\mathbb{R}^d)^d) \cap L^2(0,\infty; W^{1,2}(\mathbb{R}^d)^d)$. L'unicité de telles solutions en dimension $d \geq 3$ est encore un problème non résolu.
De nombreux auteurs ont travaillé sur l'existence et l'unicité des solutions de (2.1) dans des espaces plus petits. En particulier, les solutions fortes (ou intégrales) ont été étudiées, d'abord par Fujita et Kato en 1964, [19]. Il s'agit de solutions continues en temps, à valeurs dans l'espace où vit la condition initiale. Il apparaît rapidement que le cas critique est $v_0 \in L^d(\mathbb{R}^d)^d$ ou tout autre espace de la même « homogénéité ». Grâce aux travaux de Giga [22], en particulier sur le semi-groupe de Stokes dans des domaines réguliers avec conditions de Dirichlet au bord, l'existence de solutions se montre en suivant l'idée originelle de Kato.
Le problème de l'unicité des solutions intégrales de (2.1) dans le cas critique (c'est-̀-dire dans $L^d(\mathbb{R}^d)$) a été résolu par Furioli, Lemarié-Rieusset et Terraneo en 1998, voir [20] Dans le cas de domaines réguliers bornés (Lions, Masmoudi) ou extérieurs (Depauw), des preuves d'unicité des solutions intégrales dans le cas critique ont aussi été données.
Le cas des domaines non réguliers (de frontière lipschitzienne) est plus délicat. Le semi-groupe de Stokes y est mal connu et la littérature donne peu de résultats positifs. P. Deuring a prouvé, cf. [13], par exemple qu'il suffisait d'un point conique sur la frontière d'un domaine borné pour que le semi-groupe de Stokes ne soit pas analytique sur $L^p(\Omega)^d$ pour certains $p \in]1,\infty[$.

2.2 Résultats d'unicité

2.2.1 Cas des domaines réguliers

Les résultats de régularité maximale permettent de simplifier la preuve de l'unicité des solutions intégrales du système de Navier-Stokes incompressible (2.1) due à G. Furioli, P.-G. Lemarié-Rieusset et E. Terraneo (cf. [20]).

Définition 2.1. On dit que $u \in \mathscr{C}([0,T]; L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n))$ est une solution intégrale du système de Navier-Stokes incompressible en dimension n avec condition initiale $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ telle que $\mathrm{div} u_0 = 0$ si u

vérifie $u(t) = e^{t\Delta}u_0 + B(u,u)(t)$ pour $t \in [0,T]$ et $u(0) = u_0$, où B est définie par

$$B(u,v)(t) = \int_0^t e^{(t-s)\Delta}(-\tfrac{1}{2}\mathbb{P})\nabla \cdot (u(s) \otimes v(s) + v(s) \otimes u(s))\, ds, \quad t \in [0,T], \tag{2.2}$$

où $\mathbb{P}$ désigne le projecteur de Leray (projecteur sur les champs de vecteurs à divergence nulle) et Δ est le Laplacien dans $\mathbb{R}^n$.

L'existence de telles solutions dans $L^3(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ est due à Kato [31] en 1984 dans le cas de l'espace tout entier $\mathbb{R}^3$, ou plus généralement dans $L^n(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ dans le cas de la dimension n. On pourra se reporter au livre de P.-G. Lemarié-Rieusset [33] pour d'autres références et l'historique des ces solutions intégrales. Le résultat d'unicité s'énonce comme suit (Théorème 1 de [42]).

Théorème XII. *Soit $T > 0$. Il existe au plus une solution intégrale du système de Navier-Stokes incompressible dans $\mathscr{C}([0,T];L^3(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3))$ pour une condition initiale $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$.*

Idée de la preuve. Comme il a déjà été mentionné plus haut, l'originalité de la preuve de ce résultat dans [42] réside en l'utilisation de la régularité maximale pour le Laplacien dans $\mathbb{R}^3$. On commence par supposer qu'il existe deux solutions u et v répondant au problème. On montre alors que la différence $w = u - v$ doit vérifier $w = B(w, u + v)$. Grâce à la régularité maximale du Laplacien, on montre que (Proposition 2 de [42]) l'opérateur bilinéaire symétrique B est borné de $L^p(0,T;L^3(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)) \times \mathscr{C}([0,T];L^3(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3))$ dans $L^p(0,T;L^3(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3))$ pour tout $p \in]1,\infty[$. On montre alors que nécessairement w doit être nul sur un intervalle $[0,\tau] \subset [0,T]$, pour un $\tau > 0$. En itérant ce raisonnement, on démontre le théorème. □

Cette démonstration s'adapte au cas d'ouverts bornés réguliers. En effet, dans ce cas, Giga et al. ont montré dans [22] que le semi-groupe de Stokes était analytique et, d'autre part dans [21], avait aussi la propriété de régularité maximale. On pourra se reporter à Amann [1] (Theorem 8.2 et Remark 8.1), par exemple.

2.2.2 Domaines bornés à bord lipschitzien

La question naturelle est alors de savoir ce qui se passe dans le cas d'ouverts non réguliers. Dans le cas d'ouverts bornés lipschitziens $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (c'est-̀-dire que localement, le bord est le graphe d'une fonction lipschitzienne), on ne sait presque rien sur le semi-groupe de Stokes. Ce semi-groupe agit sur $L^2(\Omega,\mathbb{R}^n)$ (par des méthodes variationnelles classiques ; voir plus bas, partie 2.3 pour le cas de la dimension 3 et Ω ouvert quelconque), mais on ne sait pas s'il peut s'étendre sur $L^p(\Omega,\mathbb{R}^n)$. Plus précisément, P. Deuring [13] a montré qu'en dimension 3, il existe un p pour lequel le semi-groupe de Stokes n'est pas analytique sur $L^p(\Omega,\mathbb{R}^3)$ pour Ω un domaine admettant un point conique. D'abord en dimension 3 ([43]), puis en dimension quelconque ([44]), j'ai montré qu'il existait au plus une solution intégrale au système de Navier-Stokes incompressible dans $\mathscr{C}([0,T];L^n(\Omega;\mathbb{R}^n))$ pour une condition initiale $u_0 \in L^n(\Omega;\mathbb{R}^n)$ où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert lipschitzien borné. La démonstration est basée sur un résultat de Z. Shen [51] qui permet de montrer un résultat de type régularité maximale pour le problème de Stokes (voir Theorem 3.1 de [43] et Théorème 3.1 de [44]).

Théorème XIII. *Soit $n \geq 3$ et $\tau > 0$. Pour tout $r \in [\frac{2n}{n+1}, 2[$, pour tout $f \in L^2(0,\tau;W^{-1,r}(\Omega;\mathbb{R}^n))$, il existe une solution $u \in L^2(0,\tau;L^{\frac{2n}{n-1}}(\Omega;\mathbb{R}^n))$ unique du système de Stokes incompressible*

$$\left\{\begin{array}{rcll} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \nabla\pi & = & f & \textit{dans} \quad]0,\tau[\times\Omega \\ \operatorname{div} u & = & 0 & \textit{dans} \quad]0,\tau[\times\Omega \\ u & = & 0 & \textit{sur} \quad]0,\tau[\times\partial\Omega \\ u(0,\cdot) & = & 0 & \textit{dans} \quad \Omega. \end{array}\right. \tag{2.3}$$

De plus, u vérifie

$$\|u\|_{L^2(0,\tau;L^{\frac{2n}{n-1}}(\Omega;\mathbb{R}^n))} \leq \omega_r(\tau)\|f\|_{L^2(0,\tau;W^{-1,r}(\Omega;\mathbb{R}^n))},$$

où $\omega_r(\tau) = \mathcal{O}(\tau^{\frac{n+1}{4}-\frac{n}{2r}})$.

Ce théorème est alors appliqué pour montrer l'unicité des solutions du système de Navier-Stokes incompressible dans $\mathscr{C}([0,T];L^n(\Omega;\mathbb{R}^n))$ ($T>0$, $n\geq 3$, Ω ouvert lipschitzien borné de $\mathbb{R}^n$) ; voir [43], Theorem 4.3 pour le cas $n=3$ et [44], Théorème 4.1 pour le cas général.

Théorème XIV. *Soit $T>0$, soit Ω un ouvert lipschitzien borné de $\mathbb{R}^n$ ($n\geq 3$). Il existe au plus une solution du système de Navier-Stokes incompressible dans $\mathscr{C}([0,T];L^n(\Omega;\mathbb{R}^n))$ pour une condition initiale $u_0\in L^n(\Omega;\mathbb{R}^n)$, c'est-à-dire que u vérifie*

$$\left\{\begin{array}{rcll}\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u+\nabla\pi+\nabla\cdot(u\otimes u) & = & 0 & \textit{dans}\quad]0,T[\times\Omega\\ \operatorname{div} u & = & 0 & \textit{dans}\quad]0,T[\times\Omega\\ u & = & 0 & \textit{sur}\quad]0,T[\times\partial\Omega\\ u(0,\cdot) & = & u_0 & \textit{dans}\quad \Omega,\end{array}\right. \tag{2.4}$$

les deux premières égalités étant vérifiées pour presque tout $t\in]0,T[$, au sens des distributions.

Idée de la preuve. On suppose qu'il existe deux solutions u et v et on note $w=u-v$ leur différence. Alors w vérifie des équations du type (2.3) avec $f=-\nabla\cdot(w\otimes u+v\otimes w)$, et on applique alors le Théorème XIII. $\square$

2.3 Résultats d'existence

Le problème de l'existence des solutions intégrales du système de Navier-Stokes incompressible est relativement bien compris dans le cas de domaines réguliers (de classe $\mathscr{C}^2$ au moins), bornés ou extérieurs, ou dans le cas de $\mathbb{R}^n$ tout entier. Dans le cas de domaines à bord de régularité lipschitzienne, Deuring et von Wahl ont montré dans [14] qu'il existait des solutions locales régulières pour des données initiales dans $D(A^{\frac14+\varepsilon})$, $\varepsilon>0$, où A désigne l'opérateur de Stokes dans $\Omega\subset\mathbb{R}^3$. Le cas critique (en dimension 3) est $u_0\in D(A^{\frac14})$.

2.3.1 Domaines quelconques

Un des problèmes est de définir et de comprendre l'opérateur de Stokes dans des domaines non réguliers. Dans [45], j'ai adapté la méthode de Fujita-Kato ([19]) dans le cas de domaines quelconques, bornés ou non, en donnant une définition de l'opérateur de Stokes qui convient pour tous les ouverts Ω, en se limitant à la dimension 3.
On munit l'espace $L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)=\{u=(u_1,u_2,u_3)\ ;u_i\in L^2(\Omega;\mathbb{C})\}$ du produit scalaire

$$\langle u,v\rangle=\int_\Omega u\cdot\overline{v}=\sum_{i=1}^3\int_\Omega u_i\overline{v}_i\ ;$$

cet espace est alors de Hilbert. On définit

$$\mathcal{G}=\{\nabla p\ ;\ p\in L^2_{loc}(\Omega)\text{ avec }\nabla p\in L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)\}\ ;$$

$\mathcal{G}$ est un sous-espace fermé de $L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)$. On note alors $\mathcal{H}$ l'orthogonal de $\mathcal{G}$ dans $L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)$ relativement au produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et on note $\mathbb{P}$ la projection orthogonale de $L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)$ sur $\mathcal{H}$: $\mathbb{P}$ est la projection de Leray sur les champs de vecteurs à divergence nulle. Si on note J l'injection canonique de $\mathcal{H}$ dans $L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)$, l'adjoint J' de J est exactement $\mathbb{P}$. Soit $\mathcal{V}=H^1_0(\Omega;\mathbb{C}^3)\cap\mathcal{H}$. En utilisant le théorème de de Rham, on montre que $\mathcal{V}$ est un sous-espace dense de $\mathcal{H}$. En notant $\tilde{J}$ la restriction de J à $\mathcal{V}$: $\tilde{J}:\mathcal{V}\to H^1_0(\Omega;\mathbb{C}^3)$ injection canonique, l'adjoint $\tilde{J}'$ de $\tilde{J}$ est un prolongement de $\mathbb{P}$ à $\mathcal{V}'$, dual de $\mathcal{V}$; on le note $\tilde{\mathbb{P}}$. On définit sur $\mathcal{V}\times\mathcal{V}$ la forme a par

$$a(u,v)=\sum_{i=1}^3\langle\partial_i\tilde{J}u,\partial_i\tilde{J}v\rangle,\quad u,v\in\mathcal{V}.$$

Cette forme a induit l'existence d'un opérateur borné $A_0:\mathcal{V}\to\mathcal{V}'$ défini par $A_0u=\tilde{\mathbb{P}}(-\Delta^\Omega_D)\tilde{J}u$ pour $u\in\mathcal{V}$, où Δ^Ω_D est le Laplacien-Dirichlet sur $H^1_0(\Omega;\mathbb{C}^3)$. On peut alors définir l'opérateur de Stokes sur Ω de la manière suivante.

Définition 2.2. L'opérateur A défini sur son domaine $D(A) = \{u \in \mathcal{V}; A_0 u \in \mathcal{H}\}$ par $Au = A_0 u$ est appelé opérateur de Stokes.

Cette définition est équivalente à la définition classique de l'opérateur de Stokes comme le montre le théorème suivant (voir [45]).

Théorème XV. *L'opérateur de Stokes est auto-adjoint dans $\mathcal{H}$, engendre un semi-groupe analytique $(e^{-tA})_{t\geq 0}$, vérifie $D(A^{\frac{1}{2}}) = \mathcal{V}$ et*

$$\begin{aligned} D(A) &= \{u \in \mathcal{V}; \exists \pi \in (\mathscr{C}_c^\infty(\Omega))' : \nabla\pi \in H^{-1}(\Omega;\mathbb{C}^3) \text{ and } -\Delta u + \nabla \pi \in \mathcal{H}\} \\ Au &= -\Delta u + \nabla \pi. \end{aligned}$$

On peut alors prouver l'existence de solutions intégrales pour le système de Navier-Stokes pour des domaines Ω quelconques, bornés ou non, et des données initiales $u_0 \in D(A^{\frac{1}{4}})$, ce qui est le cas critique, étudié par Fujita et Kato dans [19] pour le cas $\Omega = \mathbb{R}^3$. Voir aussi [52], Theorem 4.2.2.

Théorème XVI. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine quelconque, borné ou non. Pour tout $u_0 \in D(A^{\frac{1}{4}})$, il existe $T > 0$ tel que (2.4) admette une solution intégrale u sur $[0,T]$ vérifiant $u \in \mathscr{C}([0,T]; D(A^{\frac{1}{4}})) \cap \mathscr{C}^1(]0,T]; D(A^{\frac{1}{4}}))$ avec*

$$\sup_{0<s<T} \|s^{\frac{1}{4}} A^{\frac{1}{2}} u(s)\|_{\mathcal{H}} + \sup_{0<s<T} \|s A^{\frac{1}{4}} u'(s)\|_{\mathcal{H}} < \infty.$$

Si la donnée initiale u_0 est de norme assez petite dans $D(A^{\frac{1}{4}})$, alors il existe une solution globale de (2.4).

Éléments de la preuve. L'idée de la preuve est d'étudier l'opérateur bilinéaire B donné par (2.2) pour des champs de vecteurs vérifiant les hypothèses du théorème. On montre que B est continu. La suite du raisonnement est la même que dans [19] ; voir aussi [33] pour une approche plus moderne. □

2.3.2 Domaines bornés à bord lipschitzien

Si on se restreint à des domaines bornés à bord lipschitzien de $\mathbb{R}^3$, on peut améliorer le résultat précédent et prouver l'unicité des solutions obtenues. Ceci est l'objet du papier [37]. Énonçons d'abord un résultat de localisation des domaines des puissances fractionnaires de l'opérateur de Stokes.

Théorème XVII. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine borné lipschitzien. Alors on a*

$$D(A^\alpha) \begin{array}{lll} = & L^2_{2\alpha}(\Omega;\mathbb{R}^3) \cap \mathcal{H} & \text{si } 0 \leq \alpha < \frac{1}{4}, \\ = & \{u \in L^2_{\frac{1}{2}}(\Omega;\mathbb{R}^3) \cap \mathcal{H} : \int_\Omega |u(x)|^2 \, dist\,(x,\partial\Omega)^{-1} < \infty\} & \text{si } \alpha = \frac{1}{4}, \\ = & L^2_{2\alpha,z}(\Omega;\mathbb{R}^3) \cap \mathcal{H} & \text{si } \frac{1}{4} < \alpha < \frac{3}{4}, \\ \subset & \bigcap_{p>2} L^p_{\frac{3}{p},z}(\Omega;\mathbb{R}^3) & \text{si } \alpha = \frac{3}{4}, \\ \subset & \bigcup_{p>3} L^p_{1,z}(\Omega;\mathbb{R}^3) & \text{si } \alpha > \frac{3}{4}. \end{array}$$

Éléments de la preuve. Ce résultat est basé sur la résolution du problème de Stokes linéaire stationnaire étudié par Dindŏs et Mitrea dans [15]. Pour une preuve complète, voir Theorem 5.1 et Corollary 5.5 de [37]. □

Théorème XVIII (Existence)**.** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine borné lipschitzien. Pour tout $u_0 \in D(A^{\frac{1}{4}})$, il existe $T > 0$ tel que (2.4) admette une solution intégrale u sur $[0,T]$ vérifiant $u \in \mathscr{C}([0,T]; D(A^{\frac{1}{4}})) \cap \mathscr{C}^1(]0,T]; D(A^{\frac{3}{4}}))$ avec*

$$\sup_{0<s<T} \|s^{\frac{1}{2}} A^{\frac{3}{4}} u(s)\|_{\mathcal{H}} + \sup_{0<s<T} \|s^{\frac{3}{4}} u'(s)\|_{\mathcal{H}} + \sup_{0<s<T} \|s^{\frac{3}{2}} A^{\frac{3}{4}} u'(s)\|_{\mathcal{H}} < \infty.$$

Si la donnée initiale u_0 est de norme assez petite dans $D(A^{\frac{1}{4}})$, alors il existe une solution globale de (2.4).

Éléments de la preuve. La preuve repose sur les mêmes ingrédients que le Théorème XVI, en ajoutant une caractérisation des domaines de puissances fractionnaires de l'opérateur de Stokes (Théorème XVII). Voir Theorem 6.3 de [37] pour une preuve complète. □

Dans ce cas, on montre que la solution est régulière (Theorem 6.4 de [37]) et unique dans $\mathscr{C}([0,T]; D(A^{\frac{1}{4}}))$ (Theorem 6.7 de [37]).

Théorème XIX (Régularité)**.** *Toute solution de* (2.4) *donnée par le Théorème XVIII vérifie les propriétés suivantes. Pour tout* $t \in [0,T]$*, le champ de vecteur* $u(t,\cdot)$ *est à divergence nulle et de trace nulle sur* $\partial\Omega$*. De plus, il existe une fonction scalaire* $\pi \in \mathscr{C}(]0,T]; L^2(\Omega))$ *telle que* $-\Delta_x u + \nabla_x \pi \in \mathscr{C}(]0,T]; L^2(\Omega;\mathbb{R}^3))$ *et telle que la première équation de* (2.4) *est vérifiée partout en variable de temps* $t \in]0,T]$ *et presque partout en variable d'espace* $x \in \Omega$*. D'autre part,*

$$u \in L^p_1(]0,T[;\mathcal{H}) \cap L^p(]0,T[;D(A)), \quad 1 < p < \tfrac{4}{3}. \tag{2.5}$$

Éléments de la preuve. Pour une solution donnée par le Théorème XVIII, on montre que la partie non linéaire de (2.4) appartient à $L^p(]0,T[;\mathcal{H})$ pour tout $1 < p < \frac{4}{3}$. Par la propriété de régularité maximale du problème linéaire (l'opérateur de Stokes engendre un semi-groupe analytique sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$), on montre alors (2.5). □

Théorème XX (Unicité)**.** *Pour tout* $u_0 \in D(A^{\frac{1}{4}})$*, il existe au plus une solution* $u \in \mathscr{C}([0,T]; D(A^{\frac{1}{4}}))$ *satisfaisant* (2.4)*.*

Idée de la preuve. Ce théorème est à rapprocher des Théorème XII et Théorème XIV. La preuve repose sur les mêmes ingrédients que celle du Théorème XII, c'est-à-dire la régularité maximale de l'opérateur de Stokes (immédiate dans le cas ici puisque l'opérateur de Stokes engendre un semi-groupe analytique sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$) et des propriétés d'injection des domaines des puissances fractionnaires de l'opérateur de Stokes dans des espaces L^p ou L^p_1. □

2.3.3 Domaines lipschitziens, conditions au bord modifiées

Les résultats de cette partie sont tirés de [36]. Il s'agit toujours de considérer un domaine Ω, borné, lipschitzien de $\mathbb{R}^3$. Le problème est alors d'étudier le système de Stokes en remplaçant les conditions au bord de type Dirichlet par des conditions plus naturellement liées au problème mathématique. Plus précisément, on s'intéresse au problème d'évolution linéaire

$$\left\{\begin{array}{rcll} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \nabla\pi &=& f & \text{dans} \quad]0,T[\times\Omega \\ \operatorname{div} u &=& 0 & \text{dans} \quad]0,T[\times\Omega \\ \nu\cdot u &=& 0 & \text{sur} \quad]0,T[\times\partial\Omega \\ \nu\times\operatorname{curl} u &=& 0 & \text{sur} \quad]0,T[\times\partial\Omega \\ u(0,\cdot) &=& u_0 & \text{dans} \quad \Omega, \end{array}\right. \tag{2.6}$$

où ν désigne la normale unitaire extérieure au bord $\partial\Omega$, f est un champ de vecteurs à divergence nulle donné et u_0 est la donnée initiale et où curl u désigne le rotationnel de u : curl $u = \nabla\times u$. On voudrait trouver une solution à (2.6) dans un contexte d'espaces L^p. À cette fin, on étudie le problème stationnaire associé à (2.6) suivant

$$\left\{\begin{array}{rcll} \lambda u - \Delta u + \nabla\pi &=& f & \text{dans} \quad \Omega \\ \operatorname{div} u &=& 0 & \text{dans} \quad \Omega \\ u, \operatorname{curl} u &\in& L^p(\Omega;\mathbb{C}^3) & \\ \pi &\in& L^p_1(\Omega) & \\ \nu\cdot u &=& 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \\ \nu\times\operatorname{curl} u &=& 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{2.7}$$

pour $\lambda \in \mathbb{C}$, f étant à divergence nulle et composante normale nulle au bord $\partial\Omega$. De manière analogue, on peut traiter le problème

$$\left\{\begin{array}{rcll} \lambda u - \operatorname{curl}\operatorname{curl} u &=& f & \text{dans} \quad \Omega \\ \operatorname{div} u &=& 0 & \text{dans} \quad \Omega \\ u, \operatorname{curl} u &\in& L^p(\Omega;\mathbb{C}^3) & \\ \nu\times u &=& 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{2.8}$$

ce système apparaissant comme « dual »du précédent. La résolution de ces problèmes est liée à la conjecture due à M. Taylor dans [53] : le semi-groupe de Stokes (avec conditions au bord de type Dirichlet) s'étend en un semi-groupe analytique sur L^p pour p dans un intervalle contenant $[\frac{3}{2},3]$ dépendant du caractère lipschitzien du domaine Ω, ce même intervalle pour lequel la projection de Leray se prolonge continûment sur L^p (voir Theorem 11.1 de [18] pour plus de détails ; voir aussi [28]). On note dans la suite $]p_\Omega,q_\Omega[$ cet intervalle. Si le domaine Ω est de classe $\mathscr{C}^1$, l'intervalle en question est $]1,\infty[$, et si le domaine est de classe $\mathscr{C}^2$, il a été prouvé par Y. Giga dans [22] que le semi-groupe de Stokes (avec conditions au bord de type Dirichlet) s'étend en un semi-groupe analytique sur L^p pour tout $p\in]1,\infty[$. En revanche, P. Deuring a montré dans [13] que ce n'était pas le cas si le domaine possède des points coniques, pour des p en dehors de l'intervalle cité plus haut. Pour des conditions au bord considérées dans (2.7) ou (2.8), on a le théorème (Theorem 6.1 et Lemma 3.10 dans [36]) suivant.

Théorème XXI. *Soit $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ un domaine lipschitzien borné. Alors pour tout $p\in]p_\Omega,q_\Omega[$ pour tout $\lambda\in\mathbb{C}$ avec $|\arg\lambda|<\pi-\theta$ (pour un $\theta\in]0,\pi[$), il existe une constante $c>0$ telle que pour tout $f\in L^p(\Omega;\mathbb{C}^3)$ avec $\mathrm{div} f=0$ dans Ω et $\nu\cdot f=0$ sur $\partial\Omega$, il existe une unique solution u de* (2.7) *vérifiant*

$$\begin{aligned}\|\lambda u\|_p &\le c\,\|f\|_p\\ \||\lambda|^{\frac12}\mathrm{curl}\ u\|_p &\le c\,\|f\|_p.\end{aligned}$$

Corollaire XXII. *Le semi-groupe engendré par l'opérateur de Stokes avec les conditions au bord considérées dans* (2.6) *s'étend en un semi-groupe analytique sur L^p pour tout $p\in]p_\Omega,q_\Omega[$.*

Éléments de la preuve du Théorème XXI. On remarque d'abord que la projection de Leray, d'abord définie sur $L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)$ à valeurs dans l'espace des fonctions à divergence nulle s'étend en un opérateur borné sur $L^p(\Omega;\mathbb{R}^3)$ pour p dans un intervalle contenant $[\frac{3}{2},3]$; voir [18], Theorem 11.1, pour plus de détails. D'autre part, en étudiant le Laplacien de Hodge, on peut montrer que sa résolvante admet des estimations hors diagonale (voir Lemma 5.1 de [36]) qui permettent de montrer alors (Theorem 6.1 de [36]) que pour u solution de

$$\left\{\begin{array}{rcll}\lambda u-\Delta u &=& f & \text{dans}\quad \Omega\\ \nu\cdot u &=& 0 & \text{sur}\quad \partial\Omega\\ \nu\times\mathrm{curl}\ u &=& 0 & \text{sur}\quad \partial\Omega\end{array}\right.$$

avec $f\in L^p(\Omega;\mathbb{R}^3)$, on a

$$\|u\|_p+\||\lambda|^{\frac12}\mathrm{curl}\ u\|_p+\||\lambda|^{\frac12}\mathrm{div}\ u\|_p+\|\lambda\mathrm{curlcurl}\ u\|_p+\|\lambda\nabla\mathrm{div}\ u\|_p\le M\|f\|_p$$

pour p dans le même intervalle contenant $[\frac{3}{2},3]$ mentionné plus haut, la constante M ne dépendant que de p et de l'angle ϑ du secteur $\Sigma_\vartheta\subset\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$ dans lequel varie λ. On termine par la remarque que la projection de Leray commute avec le Laplacien de Hodge (Lemma 3.7 de [36]). $\square$

Chapitre 3

Perspectives

Dans [35] écrit en collaboration avec Dorina Mitrea et Marius Mitrea, on montre l'existence d'opérateurs du type inverse de la divergence ou du rotationnel pour des domaines étoilés par rapport à une boule, et donc aussi pour des domaines lipschitziens (qui peuvent être recouverts par des ouverts étoilés par rapport à une boule). Ces opérateurs sont régularisants. De plus, on peut imposer des conditions de Dirichlet au bord. Le résultat du Theorem 4.1 de [35] dans le cas d'un ouvert de $\mathbb{R}^3$ étoilé par rapport à une boule peut se formuler de la manière suivante

Théorème XXIII. *Il existe trois opérateurs linéaires J_1, J_2 et J_3 vérifiant*

$$J_\ell : \mathscr{C}_c^\infty(\Omega;\Lambda^\ell) \to \mathscr{C}_c^\infty(\Omega;\Lambda^{\ell-1}), \quad 1 \leq \ell \leq 3,$$

où on note $\Lambda^0 = \mathbb{R}^3$, $\Lambda^1 = \mathbb{R}$, $\Lambda^2 = \mathbb{R}^3$ et $\Lambda^3 = \mathbb{R}$. Ces opérateurs J_ℓ sont régularisants au sens suivant

$$J_\ell : A^{p,q}_{s,z}(\Omega;\Lambda^\ell) \longrightarrow A^{p,q}_{s+1,z}(\Omega;\Lambda^{\ell-1}), \quad p,q \in]1,\infty[,\ s > -1 + \tfrac{1}{p},$$

où A représente soit B (pour espace de Besov), soit F (espace de Triebel-Lizorkin). L'indice z (pour « zéro ») est à comprendre de la manière suivante

$$\begin{aligned} A^{p,q}_{s,z}(\Omega) &= \left\{ f \in \left(\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)\right)'; \exists g \in A^{p,q}_s(\mathbb{R}^3) \text{ avec } \operatorname{supp} g \subset \overline{\Omega} \text{ et } g = f \text{ sur } \Omega \right\} \\ \|f\|_{A^{p,q}_{s,z}(\Omega)} &= \inf \left\{ \|g\|_{A^{p,q}_s(\mathbb{R}^3)} \right\}. \end{aligned}$$

De plus, il existe une fonction régulière θ à support dans Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$ avec $\int \theta = 1$ telle que pour $u : \Omega \to \Lambda^\ell$ suffisament régulière, on a

$$\begin{aligned} u &= \left(\int_\Omega u \right)\theta + \operatorname{div}(J_1 u) && \text{pour } \ell = 0, \\ u &= J_1(\operatorname{div} u) + \operatorname{curl}(J_2 u) && \text{pour } \ell = 1, \\ u &= J_2(\operatorname{curl} u) + \nabla(J_3 u) && \text{pour } \ell = 2, \\ u &= J_3(\nabla u) && \text{pour } \ell = 3. \end{aligned}$$

Ces opérateurs ont une expression explicite en fonction de θ, forme intégrale de l'opérateur classique d'homotopie de Cartan. Pour une fonction régulière $u : \Omega \to \Lambda^\ell$, on a

$$J_\ell u(x) = -\int_\Omega \int_1^\infty (t-1)^{\ell-1} t^{3-\ell} \theta(y + t(x-y))(x-y) \times_\ell u(y)\, dt\, dy, \quad x \in \Omega, \ell = 1, 2, \text{ ou } 3,$$

où l'opérateur de « multiplication » $\times_\ell$ représente la multiplication d'un scalaire et d'un vecteur si $\ell = 1$, le produit vectoriel de deux vecteurs si $\ell = 2$ et le produit scalaire de deux vecteurs si $\ell = 3$.

3.1 Équations de Hodge-Navier-Stokes

On a vu plus haut que l'opérateur de Stokes avec conditions au bord modifiées dans un domaine lipschitzien engendrait un semi-groupe analytique sur L^p pour des p dans un intervalle contenant $[\frac{3}{2}, 3]$. On peut alors étudier l'existence de solutions intégrales au problème non linéaire. La non linéarité nécessite cependant d'être modifiée de la manière suivante. Pour un champ de vecteurs régulier, on a

$$(u \cdot \nabla)u = \nabla\Big(\frac{1}{2}|u|^2\Big) + u \times \operatorname{curl} u.$$

Ainsi, on transforme le problème de Navier-Stokes classique en ce problème adapté aux conditions au bord modifiées :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \nabla \pi + u \times \operatorname{curl} u &=& f & \text{dans} \quad]0,T[\times\Omega \\ \operatorname{div} u &=& 0 & \text{dans} \quad]0,T[\times\Omega \\ \nu \cdot u &=& 0 & \text{sur} \quad]0,T[\times\partial\Omega \\ \nu \times \operatorname{curl} u &=& 0 & \text{sur} \quad]0,T[\times\partial\Omega \\ u(0,\cdot) &=& u_0 & \text{dans} \quad \Omega, \end{array} \right. \tag{3.1}$$

où on a intégré le terme $\nabla(\frac{1}{2}|u|^2)$ dans le terme de pression $\nabla\pi$. Le résultat (dans [38]) est alors le suivant

Théorème XXIV. *Pour tout* $u_0 \in L^3(\Omega;\mathbb{R}^3)$ *avec* $\operatorname{div} u_0 = 0$ *dans* Ω *et* $\nu \cdot u_0 = 0$ *sur* $\partial\Omega$*, il existe* $T > 0$ *et* $u \in \mathscr{C}([0,T]; L^3(\Omega;\mathbb{R}^3))$ *avec* $\operatorname{curl} u \in \mathscr{C}(]0,T]; L^3(\Omega;\mathbb{R}^3))$ *solution de* (3.1)*. Si de plus* $\|u_0\|_3$ *est suffisament petite, on a alors une solution globale en temps (on peut prendre* $T = \infty$*).*

Dans la preuve de ce théorème, on utilise l'opérateur J_2, sorte d'inverse du rotationnel.

3.2 Intégrales singulières

Afin de montrer l'unicité des solutions intégrales du problème (3.1), on peut penser à utiliser les mêmes méthodes que dans le Théorème XII ou dans le Théorème XIV. Il faut alors montrer que l'opérateur de Stokes avec conditions au bord modifiées a la propriété de régularité maximale. Les estimations hors diagonale montrées pour le Laplacien de Hodge (Lemma 5.1 de [36]) peuvent être utilisées dans le même esprit que dans l'article [4] de S. Blunck et P. Kunstmann.
De même, on peut se demander si les transformées de Riesz associées a Laplacien de Hodge (ou l'opérateur de Stokes avec conditions au bord modifiées) sont bornées sur les espaces L^p. Ce sont toujours les estimations hors diagonales du Lemma 5.1 de [36], dans la même idée que [5] ou [27], l'outil principal de la preuve.

3.3 Semi-groupe de Stokes

La collection d'opérateurs J_ℓ semble aussi indiquée pour étudier le problème de Stokes avec conditions au bord de type Dirichlet. Quelques résultats partiels ont déjà été obtenus avec Marius Mitrea dans cette direction, résultats qui peuvent facilement s'étendre à des domaines lipschitziens en remarquant qu'un domaine lipschitzien borné peut être recouvert par une famille finie d'ouverts étoilés par rapport à une boule. Le but est alors de montrer que l'opérateur de Stokes avec conditions au bord de type Dirichlet engendre un semi-groupe analytique sur certains espaces L^p, répondant ainsi à la conjecture de M. Taylor dans [53].

Bibliographie

[1] H. Amann, *On the strong solvability of the Navier-Stokes equations*, J. Math. Fluid Mech. **2** (2000), 16–98.

[2] W. Arendt, R. Chill, S. Fornaro, and C. Poupaud, *L^p-maximal regularity for non-autonomous evolution equations*, Prépublication, 2005.

[3] W. Arendt and S. Monniaux, *Domain perturbation for the first eigenvalue of the Dirichlet-Schrödinger operator*, Oper. Theory. Adv. Appl. **78** (1995), 9–19, Partial differential operators and mathematical physics (Holzau, 1994), Birkhäuser, Basel.

[4] S. Blunck and P. Kunstmann, *Weighted norm estimates and maximal regularity*, Adv. in Diff. Eq. **7** (2002), 1513–1532.

[5] ———, *Weak type (p,p) estimates for Riesz transforms*, Math. Z. **247** (2004), 137–148.

[6] J. Bourgain, *Some remarks on Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional*, Ark. Mat. **22** (1983), 163–168.

[7] D.L. Burkholder, *Martingales and Fourier analysis in Banach spaces*, Probability and Analysis (G. Letta and M. Pratelli, eds.), Lecture Notes Math., vol. 1206, Springer, 1986, pp. 61–108.

[8] ———, *Martingales and singular integrals in Banach spaces*, Handbook of the geometry of Banach spaces (Amsterdam) (W.B. Johnson and J. Lindenstrauss, eds.), vol. 1, North Holland, 2001, pp. 233–269.

[9] I. Ciorănescu and L. Zsidó, *Analytic generators for one-parameter groups*, Tôhoku Math. J. **28** (1976), 327–362.

[10] T. Coulhon and X. T. Duong, *Maximal regularity and kernel bounds : observations on a theorem by Hieber and Prüss*, Adv. Differential Equations **5** (2000), 343–368.

[11] T. Coulhon and D. Lamberton, *Régularité L^p pour les équations d'évolution*, Publ. Math. Univ. Paris VII **26** (1986), 155–165, Séminaire d'Analyse Fonctionelle 1984/1985.

[12] L. de Simon, *Un'applicazione della teoria degli integrali singolari allo studio delle equazioni differenziali lineari astratte del primo ordine*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **34** (1964), 205–223.

[13] P. Deuring, *The Stokes resolvent in 3D domains with conical boundary points : nonregularity in L^p-spaces*, Adv. Differential Equations **6** (2001), 175–228.

[14] P. Deuring and W. von Wahl, *Strong solutions of the Navier-Stokes system in Lipschitz bounded domains*, Math. Nachr. **171** (1995), 111–148.

[15] M. Dindŏs and M. Mitrea, *The stationary Navier-Stokes system in nonsmooth manifolds : the Poisson problem in Lipschitz and $\mathscr{C}^1$ domains*, Arch. Ration. Mech. Anal. **174** (2004), 1–47.

[16] G. Dore, *L^p regularity for abstract differential equations*, Functional analysis and related topics (Berlin), Lecture Notes in Mathematics, no. 1540, Springer, 1991, pp. 25–38.

[17] G. Dore and A. Venni, *On the closedness of the sum of two closed operators*, Math. Z. **196** (1987), 189–201.

[18] E. Fabes, O. Mendez, and M. Mitrea, *Potential operators on Besov spaces and the Poisson equation with Dirichlet and Neumann boundary conditions on Lipschitz domains*, J. Funct. Anal. **159** (1998), 323–368.

[19] H. Fujita and T. Kato, *On the Navier-Stokes initial value problem 1*, Arch. Rational Mech. Anal. **16** (1964), 269–315.

[20] G. Furioli, P.-G. Lemarié-Rieusset, and E. Terraneo, *Unicité dans $L^3(\mathbb{R}^3)^3$ et d'autres espaces fonctionnels limites pour Navier-Stokes*, Rev. Mat. Iberoamericana **16** (2000), 605–667.

[21] M. Giga, Y. Giga, and H. Sohr, *L^p estimates for the Stokes system*, Lecture Notes in Math., Springer, Berlin **1540** (1993), 55–67, Functional analysis and related topics, 1991 (Kyoto).

[22] Y. Giga, *Analyticity of the semigroup generated by the Stokes operator in L^r spaces*, Math. Z. **178** (1981), 297–329.

[23] M. Hieber and S. Monniaux, *Noyaux de la chaleur et estimations mixtes $L^p - L^q$ optimales : le cas non autonome*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série 1 **328** (1999), 233–238.

[24] ______, *Heat kernels and maximal $L^p - L^q$ estimates : the non-autonomous case*, Journal of Fourier Analysis and Applications **6** (2000), 467–481.

[25] ______, *Pseudo-differential operators and maximal regularity results for non-autonomous parabolic equations*, Proceedings of the American Mathematical Society **128** (2000), 1047–1053.

[26] M. Hieber and J. Prüß, *Heat kernels and maximal L^p-L^q estimates for parabolic evolution equations*, Comm. Partial Differential Equations **22** (1997), 1647–1669.

[27] S. Hofmann and J.M. Martell, *L^p bounds for Riesz transforms and square roots associated to second order elliptic operators*, Pub. Mat. **47** (2003), 497–515.

[28] D. Jerison and C. Kenig, *The inhomogeneous Dirichlet problem in Lipschitz domains*, J. Funct. Anal. **130** (1995), 161–219.

[29] N. J. Kalton and G. Lancien, *A solution to the problem of L^p-maximal regularity*, Math. Z. **235** (2000), 559–568.

[30] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 132, Springer, Berlin, 1966.

[31] ______, *Strong L^p-solutions of the Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^m$, with applications to weak solutions*, Math. Z. **187** (1984), 471–480.

[32] D. Lamberton, *Équations d'évolution linéaires associées à des semi-groupes de contractions dans les espaces L^p*, J. Funct. Anal. **72** (1987), 252–262.

[33] P.-G. Lemarié-Rieusset, *Recent developments in the Navier-Stokes problem*, Chapman & Hall / CRC Research Notes in Mathematics, 431, Boca Raton, FL, 2002.

[34] J. Leray, *Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace*, Acta Math. J. **63** (1934), 193–248.

[35] D. Mitrea, M. Mitrea, and S. Monniaux, *The Poisson problem for the exterior derivative operator with Dirichlet boundary condition on nonsmooth domains*, Prépublication,45 pages, 2006.

[36] M. Mitrea and S. Monniaux, *On the analyticity of the semigroup generated by the Stokes operator with Neumann type boundary conditions on Lipschitz subdomains of Riemannian manifolds*, Prépublication, 40 pages, 2006.

[37] ______, *The regularity of the Stokes operator and the Fujita-Kato approach to the Navier-Stokes initial value problem in Lipschitz domains*, Soumis, 2006.

[38] ______, *The nonlinear Hodge-Navier-Stokes equations in Lipschitz domains*, À paraître dans Ulmer Seminare, 2007.

[39] S. Monniaux, *Générateur analytique et régularité maximale*, Université de Franche-Comté, Besançon, 1995, Thèse de doctorat.

[40] ______, *A perturbation result for bounded imaginary powers*, Archiv der Mathematik **68** (1997), 407–417.

[41] ______, *A new approach to the Dore-Venni theorem*, Mathematische Nachrichten **204** (1999), 163–183.

[42] ______, *Uniqueness of mild solutions of the Navier-Stokes equations and maximal L^p-regularity*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série 1 **328** (1999), 663–668.

[43] ______, *On uniqueness for the Navier-Stokes system in 3D bounded Lipschitz domains*, Journal of Functional Analysis **195** (2002), 1–11.

[44] ______, *Unicité dans L^d des solutions du système de Navier-Stokes : cas des domaines lipschitziens*, Annales Mathématiques Blaise Pascal **10** (2003), 107–116.

[45] ______, *Navier-Stokes equations in arbitrary domains : the Fujita-Kato scheme*, Mathematical Research Letters **13** (2006), 455–461.

[46] S. Monniaux and J. Prüß, *A theorem of the Dore-Venni type for non-commuting operators*, Transactions of the American Mathematical Society **349** (1997), 4787–4814.

[47] S. Monniaux and A. Rhandi, *Semigroup methods to solve non-autonomous evolution equations*, Semigroup Forum **60** (2000), 122–134.

[48] P. Portal and Ž. Štrkalj, *Pseudodifferential operators on Bochner spaces and an application*, À paraître, 2006.

[49] C. Poupaud, *Régularité maximale L^p du problème de Cauchy non autonome et Théorie spectrale des opérateurs de Schrödinger sur les variétés Riemanniennes*, Université de Bordeaux 1, 2005, Thèse de doctorat.

[50] J. Prüß and H. Sohr, *On operators with bounded imaginary powers in Banach spaces*, Math. Z. **203** (1990), 429–452.

[51] Z. Shen, *Boundary value problems for parabolic Lamé systems and a nonstationary linearized system of Navier-Stokes equations in Lipschitz cylinders*, Amer. J. Math. **113** (1991), 293–373.

[52] H. Sohr, *The Navier-Stokes equations : an elementary functional analytic approach*, Birkhäuser, 2001, Birkhäuser advanced texts.

[53] M. Taylor, *Incompressible fluid flows on rough domains*, Semigroup of operators : Theory and Applications **42** (2000), 320–334, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., Birkhäuser, Basel.

[54] L. Weis, *Operator-valued Fourier multiplier theorems and maximal L^p-regularity*, Math. Ann. **319** (2001), 735–758.