Algorithmique
TD 10. Semaine du 17/12/2001

Les arbres AVL

Rappel: Un arbre AVL est un arbre de recherche binaire avec la propriété suivante: Pour chaque noeud dans l'arbre, la hauteur de son sous-arbre gauche et de son sous-arbre droit sont différent d'au maximum 1.

Exercice 1

- Donnez pour $h = 1, 2, 3, 4$ des exemples d'arbres AVL de hauteur h avec le plus petit nombre de noeuds possibles.
- Montrez que le nombre minimal de noeuds n_h d'un arbre AVL de hauteur h est donné par $n_h = fib_{h+2} - 1$ (fib_i est le i-ème nombre de Fibonnaci, $fib_0 = 1, fib_1 = 1, fib_2 = 2$, etc.)

Les arbres rouge et noir

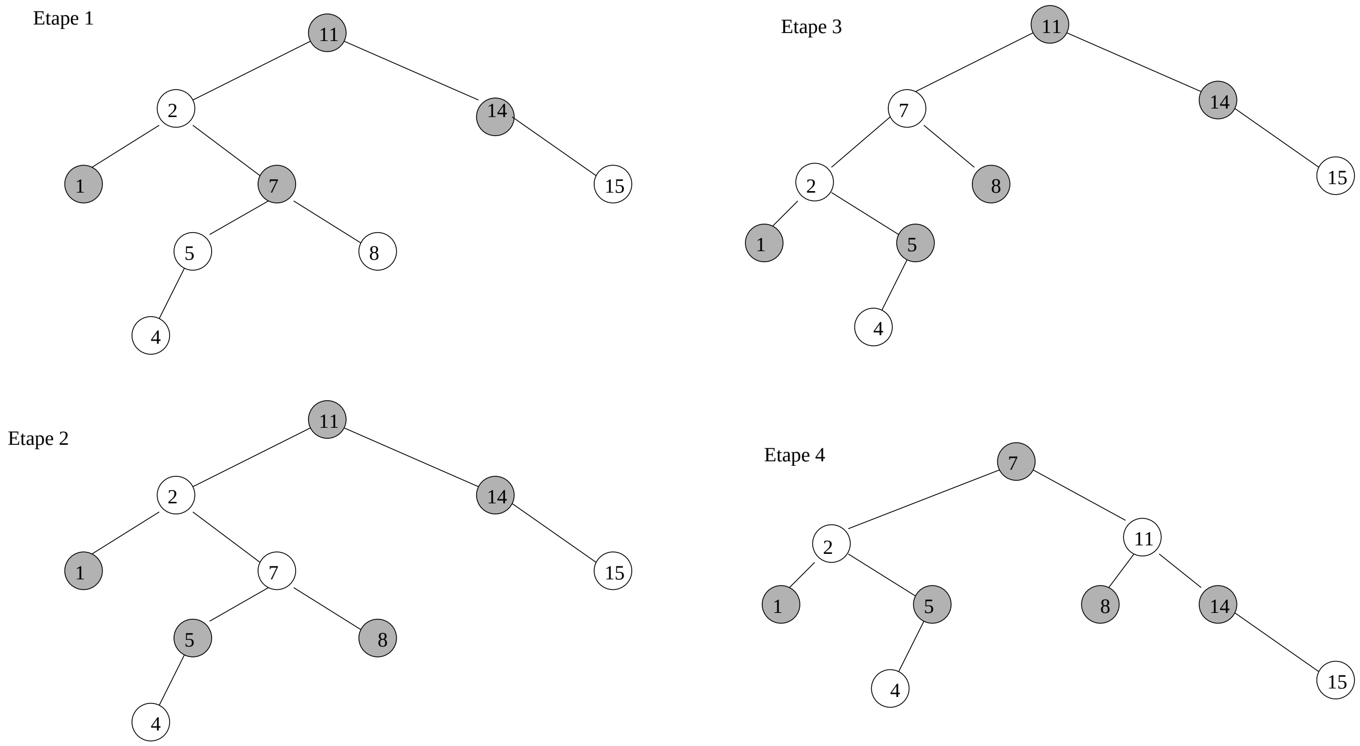
Définition: Un arbre rouge et noir est un arbre de recherche binaire tel que

1. Tous les noeuds sont colorés soit rouge soit noir.
2. Si un noeud est rouge, ses enfants doivent être noirs.
3. La racine est noire.
4. Chaque chemin dans l'arbre de la racine jusqu'à une référence null (qui indique un sous-arbre vide) doit contenir le même nombre de noeuds noirs.

Exercice 2

- Quelle est la condition qu'un arbre entièrement coloré en noir doit satisfaire pour qu'il soit un arbre rouge et noir ?
- Montrer par induction que si tous les chemins simples d'un noeud x vers un pointeur null contiennent b noeuds noirs, alors le sous-arbre dont x est la racine doit contenir au moins $2^b - 1$ noeuds noirs.
- Montrer qu'un arbre de hauteur h contient au moins $2^{h/2} - 1$ noeuds noirs.

- Qu'est-ce qu'on peut conclure sur la hauteur maximale d'un arbre contenant n noeuds ?
- Insertion dans un arbre rouge et noir à travers un exemple:



Les noeuds noirs sont gris et les noeuds rouges blancs. Dans la figure l'arbre de l'étape 1 est un arbre rouge et noir où on vient d'insérer l'élément 4. Quand on insère un élément on le colore rouge et on l'ajoute à la bonne place. Ensuite on fait des opérations de recoloration et/ou rotation suivant le cas en remontant l'arbre. Expliquer à partir de l'exemple les trois cas principaux. Indications:

- L'étape 1 montre le cas quand un noeud x et son père sont rouges et l'oncle de x est rouge.
- L'étape 2 montre le cas, où un noeud x est rouge, son père aussi, mais l'oncle de x est noir.
- L'étape 3 est comme le cas de l'étape 2, sauf que x est le fils gauche de son père.

Est-ce que les propriétés d'un arbre rouge et noir sont maintenues ? Comment ?