Algorithmique

TD 11. Semaine du 7/1/2002

Algorithmes gloutons

Exercice 1

Un vendeur souhaite rendre la monnaie à ses clients en utilisant le moins de pièces possibles. Il dispose d'un stock inépuisable de pièces de cinquante, vingt, dix, cinq et un centime d'euros, et envisage pour chaque client la méthode suivante :

- tant que la somme due n'est pas atteinte, rendre au client, sans dépasser cette somme, la pièce de la plus grande valeur possible.

On souhaite montrer ici que cette méthode aboutit toujours à une solution optimale, c'est-à-dire contenant le minimum de pièces. Soit S une solution optimale pour la somme k, représentée par le quintuplet $(s_{50}, s_{20}, s_{10}, s_5, s_1)$, où s_i est le nombre de pièces de valeur i.

- Quelles sont les valeurs maximales respectives de s_1, s_5, s_{10} ? Quelle est la valeur maximale de s_{20} ?
- Démontrer que $s_{50} = k$ div 50. On raisonnera par l'absurde, en supposant $s_{50} < k$ div 50, et en considérant toutes les valeurs possibles de s_{20}.
- De même, démontrer successivement que
  - pour $k_{20} = k$ mod 50, on a $s_{20} = k_{20}$ div 20,
  - pour $k_{10} = k_{20}$ mod 20, on a $s_{10} = k_{10}$ div 10,
  - pour $k_5 = k_{10}$ mod 10, on a $s_5 = k_5$ div 5,
  - $s_1 = k_5$ mod 5.
- En déduire que la méthode ci-dessus aboutit toujours à une solution optimale.

La méthode proposée donne-t-elle toujours une solution optimale si le vendeur dispose en plus de pièces de 25 centimes ?

Exercice 2

On suppose à présent que le vendeur dispose, pour $n \geq 0$ et $p > 1$ entiers fixés, d'un stock illimité de pièces de valeurs p^n, p^{n-1}, ... p^0, et qu'il applique la même méthode que ci-dessus.

1. Soit S une solution optimale pour la somme k, représentée par le $n+1$-uplet $(s_n, \ldots, s_0)$, où s_i est le nombre de pièces de valeur p^i :
   (a) Démontrer que pour tout $i < n$, on a $s_i < p$
   (b) Démontrer que pour tout $i < n$, on a $\sum_{j=0}^{i}(s_j \times p^j) < p^{i+1}$.
   (c) En déduire que $s_n = k$ div p^n.
2. Soit $T = (t_n, \ldots, t_0)$ la solution renvoyée par la méthode pour la somme k.
   (a) En analysant la méthode, démontrer par l'absurde que pour tout $i < n$, on a aussi $t_i < p$.
   (b) Soit $(s_n, \ldots, s_0)$ est une solution optimale pour la même somme. Montrer, par récurrence sur i, que pour tout $i < n$ on a $s_i = t_i$. On notera que :

   $$\sum_{j=0}^{n} t_j \times p^j = \sum_{j=0}^{n} s_j \times p^j$$

   et que cette égalité reste valide si l'on considère ses deux membres modulo p^{i+1}.
   (c) En déduire que la méthode renvoie une solution optimale, et que pour une somme k donnée, cette solution optimale est unique.