UNIVERSITÉ DE PROVENCE LICENCE DE MATHÉMATIQUES - 2LMAT75
2002-2003

Algèbre et Géométrie - TD n^0 2

Ex. 1. (puissance d'une matrice, l'exponentielle sur l'espace des matrices)
a) Soient $g \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme diagonalisable, λ_i $(1 \leq i \leq k)$ ses valeurs propres et $m_i := m_a(\lambda_i)$. Soit $(f_1, \ldots, f_n)$ une base de E dans laquelle la matrice de g est

$$D^{m_1,\ldots m_k}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_k} = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{m_2} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 I_{m_3} & \ldots & 0 \\ . & . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_k I_{m_k} \end{pmatrix}$$

Calculer la matrice de g^n dans une base $(e_1, \ldots, e_n)$ en utilisant la matrice de passage $P \in M_n(K)$ définie par
$$(f_1, \ldots, f_n) = (e_1, \ldots, e_n)P \ .$$
Application: Déterminer les puissances n-ièmes des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 & 0 \\ -12 & -7 & 0 & 0 \\ 20 & 11 & -6 & -12 \\ -12 & -6 & 6 & 11 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \ , \ C = \begin{pmatrix} 1 & \log_a b & \log_a c \\ \log_b a & 1 & \log_b c \\ \log_c a & \log_c b & 1 \end{pmatrix} \ ,$$

où a, b, c sont trois nombres réels strictement positifs et différents de 1 $(n \in \mathbb{N})$.
b) La matrice

$$J^r_\lambda := \left.\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right\} r$$

s'appelle *bloc de Jordan* de valeur propre λ et de taille r.
Calculer les puissances n-ièmes de J^r_λ $(n \in \mathbb{N})$.
c) (l'exponentielle sur l'espace des matrices)

1. Soit $Y \in M_n(\mathbb{C})$. Démontrer que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{Y^n}{n!}$ est convergente (avec la convention $Y^0 = I_n$).
   Indication: Utiliser la norme
   $$\| \cdot \| : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}_+ \ , \ \| Y \| := \sup\{ \| Y(v) \| \mid v \in \mathbb{C}^r, \ \| v \| = 1\}$$
   sur l'espace des matrices complexes carrées et le fait que cette norme est sous-multiplicative.

2. On pose $\exp(Y) := \sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{Y^n}{n!}$. Calculer $\exp(D^{m_1,\ldots m_k}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_k})$ et $\exp(J^r_\lambda)$.
   Indication: Observer que $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A)$ si $AB = BA$, écrire $J^r_\lambda = J^r_0 + \lambda I_r$ et enfin utiliser le fait que J^r_0 est une matrice nilpotente.

Ex. 2. (systèmes différentiels linéaires ordinaires)

1. Démontrer que l'application $\exp : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ est différentiable et citer le théorème concernant les séries de fonctions utilisé. Démontrer que, pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, la dérivée de l'application $\mathbb{R} \ni t \mapsto \exp(tA)$ est

$$\frac{d}{dt}\exp(tA) = A\exp(tA) = \exp(tA)A\ .$$

2. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et soit $\dot{x}\ (:= \frac{dx}{dt}) = Ax$ le système différentiel lineaire associé à A. Démontrer que, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, l'application $\varphi_{x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \exp(tA)x_0$ est l'unique solution maximale du système qui vérifie la condition initiale $\varphi_{x_0}(0) = x_0$.

3. Résoudre explicitement le système de la question 2 dans les cas $A = D^{m_1,\ldots m_k}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_k}$ et $A = J^r_\lambda$. Généraliser les résultats obtenus à une matrice A semblable à l'une de ces deux matrices.

Ex. 3. (sous-espaces d'un espace vectoriel complexifié)
Soit E un espace vectoriel réel de dimension n et soit $E^{\mathbb{C}} = \{x + iy|\ x, y \in E\}$ son complexifié. Soit $^- : E^{\mathbb{C}} \to E^{\mathbb{C}}$ l'isomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire définie par $x + iy \mapsto x - iy$, et $F \subset E^{\mathbb{C}}$ un sous-espace *complexe* de $E^{\mathbb{C}}$.

1. Démontrer que les conditions suivantes sont équivalentes:
   (a) $F \cap E = \{0\}$.
   (b) $F \cap \bar{F} = \{0\}$ (c. à d. F et $\bar{F}$ sont en somme directe).
   (c) L'application $\varphi : F \to (F+\bar{F}) \cap E$ donnée par $\varphi(x) = x + \bar{x}$ est bijective (donc est un isomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire).

2. Soit $(f_1, \ldots f_k)$ une base de F sur $\mathbb{C}$, et soient $u_i := f_i + \bar{f_i}$ et $v_i := i(f_i - \bar{f_i})$. Démontrer que $(u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k)$ est une base du sous-espace réel $(F+\bar{F}) \cap E \subset E$.

Ex. 4. (valeurs propres complexes d'un endomorphisme réel)
Soit E un espace vectoriel réel de dimension n et $f \in \mathrm{End(E)}$. Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ une valeur propre complexe de f et soient $E^{\mathbb{C}}_\lambda$ et $E^{\mathbb{C}}_{\bar{\lambda}}$ les sous-espaces propres associés à λ et $\bar{\lambda}$ respectivement. Démontrer que

1. $E^{\mathbb{C}}_\lambda \cap E^{\mathbb{C}}_{\bar{\lambda}} = \{0\}$, $\dim_{\mathbb{R}}[(E^{\mathbb{C}}_\lambda \cap E^{\mathbb{C}}_{\bar{\lambda}}) \cap E)] = 2m_g(\lambda)$

2. Le sous-espace $E_{\lambda,\bar{\lambda}} := (E^{\mathbb{C}}_\lambda \cap E^{\mathbb{C}}_{\bar{\lambda}}) \cap E) \subset E$ est f-invariant.

3. En utilisant l'exercice précédent, démontrer que le sous-espace $E_{\lambda,\bar{\lambda}}$ admet une base $(u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k)$ telle que

$$f(u_i) = Re(\lambda)u_i + Im(\lambda)v_i\ ,\ f(v_i) = -Im(\lambda)u_i + Re(\lambda)v_i$$

4. Calculer $\det(f|_{E_{\lambda,\bar{\lambda}}})$.

Ex. 5. Soit $K_d[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans K de degré inférieur ou égal à d. Soit $\delta : K_d[X] \to K_d[X]$ l'endomorphisme donné par la dérivation formelle $P(X) \mapsto P'(X)$. Montrer que δ est nilpotent, calculer son indice de nilpotence, $P_\delta(X)$ et $m_\delta(X)$; enfin, trouver une base dans laquelle la matrice de δ est sous forme de Jordan.
Indication: On considérera d'abord le cas où $\mathrm{car(K)} = 0$.