UNIVERSITÉ DE PROVENCE LICENCE DE MATHÉMATIQUES - 2LMAT75
2002-2003

Algèbre et Géométrie - TD n^0 4

Ex. 1. (diagonalisation simultanée)
Soit (E, f) un espace euclidien et $g : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire définie positive. Démontrer que E admet une base qui est à la fois f-orthonormale et g-orthogonale. Donner l'équivalent de ce théorème pour un espace hermitien.

Ex. 2. (diagonalisation simultanée)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur K.

1. Soit $u \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme diagonalisable. Démontrer qu'un sous-espace $F \subset E$ est u-invariant (c'est à dire vérifie $u(F) \subset F$) si et seulement si F est de la forme
$$F = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Spec}(u)} F_\lambda \ , \ F_\lambda \subset E_\lambda \ .$$
2. Soient u et $v \in \mathrm{End}(E)$ deux endomorphismes diagonalisables qui commutent. Montrer que u et v sont *simultanément* diagonalisables, c. à d. qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de u et v sont toutes deux diagonales.

Ex. 3. (isomorphismes exceptionnels)

1. 1$^{\text{er}}$ isomorphisme exceptionnel : Soit $F : \mathbb{C} = M_1(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C})$ l'application définie par
$$F(a+bi) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$
Montrer que F
   (a) est un monomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres ;
   (b) induit un isomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres de Lie $(F_{|\mathfrak{u}(1)} :=)\ \varphi : \mathfrak{u}(1) \to \mathfrak{so}(2)$;
   (c) induit un isomorphisme de groupes $(F_{|U(1)} :=)\ f : U(1) \to SO(2)$;

   enfin, que l'on a :

   (d) $\exp \circ \varphi = f \circ \exp_{|\mathfrak{u}(1)}$.
2. 2$^{\text{ème}}$ isomorphisme exceptionnel : Soit $E := \{ai + bj + ck |\ a,\ b,\ c \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{H}$ le $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel des quaternions purs, $\mathbb{S}^3 := \{q \in \mathbb{H} |\ \|q\| = 1\}$ l'ensemble des quaternions de norme 1 (c'est une *sphère* de dimension 3) et enfin $H : \mathbb{H} \to M_2(\mathbb{C})$ l'application donnée par
$$H(w+zi) = \begin{pmatrix} w & -z \\ \bar{z} & \bar{w} \end{pmatrix}.$$
Montrer que H
   (a) est un monomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres ;
   (b) induit un isomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres de Lie $(H_{|E} =:)\ \chi : E \to \mathfrak{su}(2)$, où l'on considère E comme sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie associée à l'algèbre associative $\mathbb{H}$ (voir TD 3) ;
   (c) induit un isomorphisme de groupes $(H_{|\mathbb{S}^3} =:)\ h : \mathbb{S}^3 \to SU(2)$;

   enfin, que l'on a :

(d) $\exp \circ \chi = h \circ \exp_{|\mathfrak{su}(2)}$;

(e) χ est une isométrie $(E, \|\cdot\|) \to (\mathfrak{su}(2), \sqrt{\det})$.

(On observera que, sur $su(2)$, on a $\det(a) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}({}^t\bar{a}a)$, donc que $a \mapsto \sqrt{\det(a)}$ est une norme.)

3. (caractérisations de $U(2)$ et de $SU(2)$)
   Montrer que

$$U(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta\ e^{i\alpha} & -\sin\theta\ e^{i\beta} \\ \sin\theta\ e^{i\gamma} & \cos\theta\ e^{i\delta} \end{pmatrix} \middle|\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \in \mathbb{R},\ \alpha+\delta = \gamma+\beta \right\}$$

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta\ e^{i\alpha} & -\sin\theta\ e^{i\beta} \\ \sin\theta\ e^{i\gamma} & \cos\theta\ e^{i\delta} \end{pmatrix} \middle|\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \in \mathbb{R},\ \alpha+\delta = \gamma+\beta = 0 \right\}.$$

4. Pour tout "quaternion" $q \in SU(2)$, démontrer que l'application $\mathrm{ad}_q : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{su}(2)$ donnée par $\mathrm{ad}_q(a) = qaq^{-1}$ appartient à $SO(\mathfrak{su}(2), \sqrt{\det}) \simeq SO(3)$.
   En déduire que l'application $\mathrm{ad} : q \mapsto \mathrm{ad}_q$ induit un isomorphisme

$$\iota : \mathbb{S}^3/\{\pm 1\} \simeq SU(2)/\{\pm I_2\} \to SO(3).$$

Ex. 4. Soit a un endomorphisme normal de l'espace hermitien (E, h) et soit $n \in \mathbb{N}$. Quel est le nombre de solutions normales qu'admet l'équation $u^n = a$?
Indication : Utiliser l'exercice 2, 2.

Ex. 5. En utilisant le théorème de Gramm-Schmidt, démontrer que

1. toute matrice $A \in GL(n, \mathbb{R})$ se décompose d'une façon unique comme $A = UT$, où $U \in O(n)$ et T est une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont strictement positifs ;
2. toute matrice $A \in GL(n, \mathbb{C})$ se décompose d'une façon unique comme $A = UT$, où $U \in U(n)$ et T est une matrice triangulaire supérieure (complexe) dont les éléments diagonaux sont (réels et) strictement positifs.

Ex. 6. Soit (E, h) un espace hermitien et $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout endomorphisme hermitien a à valeurs propres *positives* il existe un unique endomorphisme hermitien b à valeurs propres *positives* tel que $b^n = a$.
2. Démontrer que tout automorphisme $a \in GL(E)$ se décompose comme $a = bu$, où b est un endomorphisme hermitien à valeurs propres strictement positives et $u \in U(E)$.
3. Donner l'équivalent de ce résultat pour un espace euclidien.

Ex. 7. (actions canoniques) Soit $\alpha : SO(n) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'action naturelle de $SO(n)$ sur $\mathbb{R}^n$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ décrire l'orbite et le stabilisateur de x par rapport à l'action α.
2. Cette action est-elle (a) transitive, (b) libre, (c) effective ?

Mêmes questions pour les actions naturelles de $SU(n)$ et de $U(n)$ sur $\mathbb{C}^n$. Observer que l'action de $SU(2)$ sur $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ est libre et faire le lien avec l'Ex. 3, 2.

Ex. 8. Soit $\alpha : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (resp. $\beta : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$) l'action du groupe multiplicatif $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ sur $\mathbb{R}^2$ donnée par $\alpha(t, (x, y)) := (tx, ty)$ (resp. $\beta(t, (x, y)) := (tx, t^{-1}y)$).

1. Dans chaque cas, décrire l'orbite et le stabilisateur d'un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
2. Montrer que, dans le cas de l'action α, le quotient $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{R}_+^*$ est homéomorphe au cercle $\mathbb{S}^1$, tandis que, pour l'action β, le quotient $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{R}_+^*$ est un espace non-Hausdorff.