

Algèbre et Géométrie - PARTIEL, 2 mai 2003

Ex. 1. (Questions de cours)

Énoncer et démontrer les critères de diagonalisation vus en cours.

Rappel : Il y en a 4+1, le dernier utilisant le polynôme minimal.

Ex. 2. (Jordanisation)

Soit E un espace vectoriel de dimension 15 sur un corps commutatif K et $u \in \text{End}(E)$ tel que $\text{Spec}(u) = \{a, b\}$, $a \neq b$.

On sait que

$$\dim[\ker(u - a\text{id}_E)] = 3, \quad \dim[\ker(u - a\text{id}_E)^2] = 6, \quad \dim[\ker(u - a\text{id}_E)^3] = 8$$

$$\dim[\ker(u - b\text{id}_E)] = 4, \quad \dim[\ker(u - b\text{id}_E)^2] = 7.$$

Préciser :

1. Le polynôme caractéristique de u .
2. Est-ce que u est trigonalisable ? Pourquoi ?
3. Les dimensions des espaces caractéristiques N_a, N_b et des espaces propres E_a, E_b de chaque valeur propre.
4. Les multiplicités algébriques et géométriques de chaque valeur propre.
5. Le polynôme minimal de u .
6. La forme canonique de Jordan de u .
7. La matrice de la puissance n -ième de u dans une base dans laquelle u prend sa forme canonique de Jordan.
8. La matrice de $\exp(u)$ dans une base dans laquelle u prend sa forme canonique de Jordan) (pour cette question on suppose $K = \mathbb{R}$).