2LMAT75 : Partiel du 030502

Corrigé de l'ex. 2

Remarque préliminaire : Soient P(X) et Q(X) $\in$ K[X], premiers entre eux.
Ne pas confondre les deux énoncés suivants :

A) ker P(u) $\cap$ ker Q(u) = {0} (P(u) et ker Q(u sont en **somme directe**).
(En effet, on a x = id(x) = A(u)[P(u)(x)] + B(u)[Q(u)(x)]
(où A(X)P(X) + B(X)Q(X) = 1, par Bézout) ;
donc si P(u)(x) = Q(u)(x) = 0, on a x = A(u)(0) + B(u)(0) = 0.)

B) Si, *de plus*, P(X)Q(X) est un polynôme annulateur de u
(c. à d. si P(u)Q(u) = 0, ou encore si $m_u(X)$ divise P(X)Q(X)),
alors E = ker P(u) $\oplus$ ker Q(u).
[En effet, on a alors $\forall x \in E$ $x = x_P + x_Q$ $\{$où $x_P := [Q(u)B(u)](x)$ et $x_Q := [P(u)A(u)](x)\}$
avec $x_P \in$ ker P(u) et $x_Q \in$ ker Q(u) (puisque $P(u)\{[Q(u)B(u)](x)\} = Q(u)\{[P(u)A(u)](x)\} = 0$).]

Ici, rien ne permet de conclure *a priori* que $(X-a)^3(X-b)^2$
est un polynôme annulateur de u.

On pose v := u – a.id et w := u – b.id.

1. Comme $\ker v^3 \cap \ker w^2 = \{0\}$ (cf. supra), on a, en posant $F := \ker v^3 + \ker w^2$,
$\dim F =^{(\text{Grassman})} \dim \ker v^3 + \dim \ker w^2 - \dim (\ker v^3 \cap \ker w^2)$
$= 8 + 7 - 0 = 15 = \dim E$,
et par conséquent F = E ($E = \ker v^3 \oplus \ker w^2$).

2. On choisit : une base de $\ker v^3$ trigonalisant $u_{|\ker v^3}$ (et/ou $v_{|\ker v^3}$)
ainsi qu'une base de $\ker w^2$ trigonalisant $u_{|\ker w^2}$ (et/ou $w_{|\ker w^2}$).
En réunissant ces deux bases, on voit que v est représenté dans celle-ci par une matrice triangulaire ayant comme coefficients sur la diagonale
a (8 fois) et b (7 fois).
Donc (u est trigonalisable et) $P_u(X) = -(X-a)^8(X-b)^7$;
en particulier $P_u(X)$ est scindé.
On a $\ker v \subset \ker v^2 \subset \ker v^3 \subset \ker v^4 \subset \dots$
et $\ker w \subset \ker w^2 \subset \ker w^3 \subset \dots$
A nouveau par « Grassman », on doit avoir
$\ker v^3 = \ker v^4 = \dots$ et $\ker w^2 = \ker w^3 = \dots$
Donc $m_u(X) = (X-a)^3(X-b)^2$.

3. (redondant) $P_u(X)$ est scindé, donc u est trigonalisable.

4-5. $\text{mult}_a(a) = \dim N_a = \dim \ker v^8 = 8$; $\text{mult}_a(b) = \dim N_b = \dim \ker w^7 = 7$;
$\text{mult}_g(a) = \dim E_a = \dim \ker v = 3$; $\text{mult}_g(b) = \dim E_b = \dim \ker w = 4$.

6. Pour la valeur propre a, on a
– somme des tailles des blocs de Jordan = $\text{mult}_a(a)$ = 8 ;
– taille du plus grand bloc = indice de nilpotence de v
= multiplicité de a comme racine de $m_u(X)$ = 3 ;
et – nombre de blocs = $\text{mult}_g(a)$ = 3.

La *seule* possibilité est donc :

un bloc de taille 2 + un bloc de taille 3 + un bloc de taille 3 = 8.

De même, pour b, la *seule* possibilité est d'avoir

un bloc de taille 1 et trois blocs de taille 2.

$$J(u) := \begin{pmatrix}
a & 1 & & & & & & & & & & & & & \\
0 & a & & & & & & & & & & & & & \\
 & & a & 1 & 0 & & & & & & & & & & \\
 & & 0 & a & 1 & & & & & & & & & & \\
 & & 0 & 0 & a & & & & & & & & & & \\
 & & & & & a & 1 & 0 & & & & & & & \\
 & & & & & 0 & a & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & 0 & 0 & a & & & & & & & \\
 & & & & & & & & b & & & & & & \\
 & & & & & & & & & b & 1 & & & & \\
 & & & & & & & & & 0 & b & & & & \\
 & & & & & & & & & & & b & 1 & & \\
 & & & & & & & & & & & 0 & b & & \\
 & & & & & & & & & & & & & b & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & & 0 & b
\end{pmatrix}$$

est donc *une* forme canonique de Jordan de u (elle est *unique* si l'on présente les blocs de Jordan par ex. par taille croissante, et si l'on ordonne {a, b}). (*)

7. Les puissances et l'exponentielle se calculent bloc par bloc.

Pour $J := \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ & a & 1 \\ & & a \end{pmatrix} = aI_3 + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix} = D + N$ (décomposition de Dunford),

on a : $J^n = (D + N)^n = D^n + nD^{n-1}N + \frac{n(n-1)}{2}D^{n-2}N^2 + \ldots$

$$= a^nI_3 + na^{n-1}N + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}N^2 = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2} \\ & a^n & na^{n-1} \\ & & a^n \end{pmatrix}$$

et $\quad e^J = e^{D+N} = e^De^N = (e^aI_3).(I_3 + N + \frac{1}{2}N^2 + \ldots) = e^a(I_3 + N + \frac{1}{2}N^2)$

$$= e^a \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^a & e^a & \frac{1}{2}e^a \\ & e^a & e^a \\ & & e^a \end{pmatrix}.$$

(En effet, $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$.)

(*) « indication » (valeur propre a uniquement) **:**
i) On choisit une base $(e_1, \ldots, e_8)$ de $\ker v^3$ **respectant la filtration** (ou **drapeau**) $\ker v \subset \ker v^2 \subset \ker v^3$, c. à d. telle que l'on a

$$\ker v^2 \oplus \langle e_7, e_8 \rangle = \ker v^3$$

$$\ker v \oplus \langle e_4, e_5, e_6 \rangle = \ker v^2$$

et $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle = \ker v$

On pose $F_3 := \langle e_7, e_8 \rangle$.

ii) On choisit un vecteur $f_4 \in \ker v^2$ de sorte que l'on a

$$\ker v \oplus \langle f_4, v(e_7), v(e_8) \rangle = \ker v^2,$$

puis l'on pose $F_2 = \langle f_4 \rangle$.

On remplace la base initiale par la base $(e_1, e_1, e_3, f_4, v(e_7), v(e_8), e_7, e_8)$
Cette nouvelle base respecte toujours la filtration ; en particulier, on a

$$\ker v \oplus F_2 \oplus v(F_3) = \ker v^2.$$

iii) On remplace cette deuxième base par la base

$$(v(f_4), v^2(e_7), v^2(e_8), f_4, v(e_7), v(e_8), e_7, e_8),$$

et l'on pose $F_1 = \{0\}$, de sorte que l'on a

$$F_1 \oplus v(F_2) \oplus v^2(F_3) = \ker v$$

iv) La matrice de $v_{|\ker v^3}$ par rapport à cette dernière base est

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} v(f_4) & v^2(e_7) & v^2(e_8) & f_4 & v(e_7) & v(e_8) & e_7 & e_8 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ v(f_4) \\ v^2(e_7) \\ v^2(e_8) \\ f_4 \\ v(e_7) \\ v(e_8) \\ e_7 \\ e_8 \end{array}.$$

$$v(F_2) \oplus v^2(F_3) \oplus F_2 \oplus v(F_3) \oplus F_3 = N_a$$

$$\ker v \subset \ker v^2 \subset \ker v^3 = N_a$$

(On observera que l'on obtient une matrice qui ressemble à un bloc de Jordan, où cependant les « coefficients » dudit bloc sont eux-mêmes des blocs (pas forcément carrés).)

v) On permute les vecteurs de la dernière base obtenue de sorte d'obtenir une base Jordanisante. La matrice de $v_{|\ker v^3}$ dans cette base devient alors

$$\begin{array}{cc}
\begin{matrix} v(f_4) & f_4 & v^2(e_7) & v(e_7) & e_7 & v^2(e_8) & v(e_8) & e_8 \end{matrix} & \\
\begin{pmatrix}
0 & 1 & & & & & & \\
0 & 0 & & & & & & \\
 & & 0 & 1 & 0 & & & \\
 & & 0 & 0 & 1 & & & \\
 & & 0 & 0 & 0 & & & \\
 & & & & & 0 & 1 & 0 \\
 & & & & & 0 & 0 & 1 \\
 & & & & & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} &
\begin{matrix} v(f_4) \\ f_4 \\ v^2(e_7) \\ v(e_7) \\ e_7 \\ v^2(e_8) \\ v(e_8) \\ e_8 \end{matrix}
\end{array}.$$

On peut faire de même pour la valeur propre b.

vi) Enfin, pour dire les choses d'une façon compliquée, si l'on pose, pour un endomorphisme nilpotent v quelconque

$$(k_i)_i := (\dim \ker v^i)_i \,,$$

alors $(k_i)_i$ est une suite croissante stationnaire à partir du rang r := *in* v.
On peut donc l'écrire comme une série

$$k_i := \sum_{j=1}^{i} a_j \,, \text{ avec } (a_j)_j \text{ suite positive de support finie.}$$

La démonstration du théorème de Jordan implique alors que $(a_j)_j$ est, de plus, *décroissante*.
(En effet, on a : $a_j - a_{j+1} = \dim F_j := n_j$ = nombre de blocs de Jordan de taille j.)

[Dans le cas présent (valeur propre a), le système

$a_1 = 3,\ a_2 = ?,\ a_3 = ?,\ a_4 = a_5 = \ldots = 0$

$a_1 + a_2 + a_3 + 0 + 0 + \ldots = 8$

n'admet qu'une seule solution : $a_1 = 3,\ a_2 = 3,\ a_3 = 2,\ a_4 = a_5 = \ldots = 0$

et donc $n_1 = a_1 - a_2 = \dim F_1 = 0$

$n_2 = a_2 - a_3 = \dim F_2 = 1$

$n_3 = a_3 - a_4 = \dim F_3 = 2.$]

On a : $n_j = a_j - a_{j+1} = (k_j - k_{j-1}) - (k_{j+1} - k_j) = 2k_j - k_{j-1} - k_{j+1}$

et donc $k_j = \frac{1}{2}(k_{j-1} + k_{j+1}) + \frac{1}{2}n_j \geq \frac{1}{2}(k_{j-1} + k_{j+1})$

c.à d. $(k_i)_i$ est une suite concave (:= la restriction d'une fonction concave à $\mathbb{N}$).
(Comme elle dévient stationnaire, elle n'est pas *strictement* concave.)
Chacune des suites $(k_i)_i, (a_j)_j$ et $(n_j)_j$ caractérise l'endomorphisme nilpotent v à similitude (conjugaison) près. Inversement, toute suite $(k_i)_i$ (resp. $(a_j)_j$ et $(n_j)_j$) (soumise aux conditions précitées) correspond à celle définie par un endomorphisme nilpotent (unique à similitude près).