Exercice 1. Soit E un espace vectoriel, $f \in \mathrm{End}(E)$, $P_1, \ldots, P_k$ des polynômes premiers entre-eux deux à deux et $K_i = \ker(P_i(f))$. Les K_i sont en somme directe et de plus si le produit $P_1 \cdots P_k$ est dans l'idéal annulateur de f ($P_1 \cdots P_k(f) = 0$) alors la somme est E.

Exercice 2. **1.** On calcule le pôlynome caractéristique par blocs :

$$P_Q(X) = \begin{vmatrix} 3-X & 1 \\ -4 & -1-X \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2-X & 1 \\ -1 & -X \end{vmatrix} = (X-1)^4.$$

P_Q a une seule racine d'ordre 4 et $\mathrm{Spec}(u) = \{1\}$.

2. $E_1 = \ker(u - id)$, un vecteur (x, y, z, t) est dans E_1 si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & y & & & & & = & 0 \\ -4x & - & 2y & & & & & = & 0 \\ 7x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ -17x & - & 6y & - & z & - & t & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & y & & & & & = & 0 \\ 5x & & & + & z & + & t & = & 0 \end{array}\right.$$

E_1 est un sous-espace de dimension 2 dont les équations sont données ci-dessus.

Le sous-espace caractéristique N_1 est $\ker((u-id)^4)$ or $(X-1)^4$ est le polynôme caractéristique de u, donc d'après le théorème de CAYLEY-HAMILTON, $(u-id)^4 = 0$ et donc $N_1 = \mathbb{R}^4$.

3. En calculant, on constate que $(Q - I_4)^2 = 0$ et bien sûr $Q - I_4 \neq 0$, l'indice de nilpotence de $Q - I_4$ est donc 2.

4. D'après la question précédente le polynôme minimal de Q est $(X-1)^2$.

5. 1 est la seule valeur propre de Q (et son polynôme caractéristique est scindé), donc Q admet une forme réduite de JORDAN constituée de blocs de JORDAN associés à la valeur propre 1. Puisque que $\dim E_1 = 2$ la forme réduite de JORDAN de Q contient deux blocs de JORDAN, de plus le polynôme minimal de Q est $(X-1)^2$ donc les blocs de JORDAN sont de taille inférieure ou égale à 2. Comme la dimension est 4, une forme réduite de JORDAN de Q contient exactement deux blocs de JORDAN associés à la valeur propre 1 de taille 2 :

$$\exists P \in GL_4(\mathbb{R}), P^{-1}QP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Les vecteurs $u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ engendrent un supplémentaire de E_1 dans $\mathbb{R}^4$ (c'est une base de l'orthogonal de E_1 pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^4$). On pose $u_1 = (u - id)(u_2) = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 15 \\ -40 \end{pmatrix}$ et $u_3 = (u - id)(u_4) = \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ 37 \\ -87 \end{pmatrix}$. Alors dans la base (u_1, u_2, u_3, u_4) la matrice de u est la matrice de JORDAN décrite à la question précédente.

La matrice

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 10 & 5 \\ -10 & 1 & -20 & 0 \\ 15 & 0 & 37 & 1 \\ -40 & 0 & -87 & 1 \end{pmatrix}$$

satisfait l'équation de la question précédente.

Exercice 3. Le polynôme caractéristique de A est $P_A(X) = (X-1)^2(X-a)$. Un vecteur (x, y, z) est dans le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} & y & & = & 0 \\ bx & & + \ (a-1)z & = & 0 \end{array} \right.$$

$\boxed{\text{Cas } a = 1 \text{ et } b = 0}$

- $P_A(X) = (X-1)^3$,
- le sous-espace propre E_1 associé à l'unique valeur propre 1 a pour équation $y = 0$, il est de dimension 2
- le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre 1 est, comme à l'exercice 2 question 2, $N_1 = \mathbb{R}^3$.
- Par le calcul nous voyons que $(A - I_3)^2 = 0$, le polynôme minimal est donc $m_A(X) = (X-1)^2$.
- La matrice A est déjà sous une forme réduite de Jordan.

$\boxed{\text{Cas } a = 1 \text{ et } b \neq 0}$

- $P_A(X) = (X-1)^3$,
- le sous-espace propre E_1 associé à l'unique valeur propre 1 a pour équations $x = y = 0$, il est de dimension 1,
- le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre 1 est toujours $N_1 = \mathbb{R}^3$.
- Par le calcul nous voyons que $(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} \neq 0$. Le polynôme minimal est donc $m_A(X) = (X-1)^3$.
- Comme $\dim E_1 = 1$ la forme réduite de Jordan possède un seul bloc de Jordan associé à la valeur propre 1, il est de taille 3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{Cas } a \neq 1}$

- $P_A(X) = (X-1)^2(X-a)$ et A possède deux valeurs propres distinctes 1 et a.
- Le sous-espace propre E_1 associé à la valeur propre 1 a pour équations :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} & & y & = & 0 \\ bx & + & (a-1)z & = & 0 \end{array} \right.$$

  il est de dimension 1. Le sous-espace propre E_a associé à la valeur propre a a pour équations $x = y = 0$, il est de dimension 1.
- Le sous-espace caractéristique N_1 associé à la valeur propre 1 est $\ker((A - I_3)^2)$ il a pour équation $b(a-1)x + by + (a-1)^2 z = 0$ il est de dimension 2, le sous-espace caractéristique associé à a est $N_a = E_a$, car a est une valeur propre de multiplicité algébrique 1.

– Comme $E_1 \subsetneq N_1$ le polynôme minimal de A est $m_A(X) = (X-1)^2(X-a) = P_A(X)$.
– La forme réduite de JORDAN comporte un seul ($\dim E_1 = 1$) bloc de taille 2 (exposant de $X-1$ dans $m_A(X)$) associé à la valeur propre 1 et un bloc de taille 1 associé à la valeur propre a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. **1.** Le polynôme caractéristique de F est $X^2 - X - 1$ ses racines sont $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. On cherche $u_\alpha = (x,y)$ un vecteur propre associé à α : $x - \alpha y = 0$, par exemple $u_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_\beta = (x,y)$ associé à β : $x - \beta y = 0$, par exemple $u_\beta = \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, avec $P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ on a $P^{-1}FP = D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.

2. Pour $n = 0$ on a bien $\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = F^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Soit n un entier et supposons la relation vraie au rang n : $\begin{pmatrix} \varphi_{n+1} \\ \varphi_n \end{pmatrix} = F^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Alors au rang $n+1$ on a

$$\begin{pmatrix} \varphi_{n+2} \\ \varphi_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{n+1} + \varphi_n \\ \varphi_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{n+1} \\ \varphi_n \end{pmatrix} = FF^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = F^{n+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Par récurrence nous avons bien montré que pour tout entier n

$$\begin{pmatrix} \varphi_{n+1} \\ \varphi_n \end{pmatrix} = F^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Effectuons quelques calculs :

$$P^{-1} = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}$$

$$PD^{n-1}P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{5}}{5} P \begin{pmatrix} \alpha^{n-1} & 0 \\ 0 & \beta^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^{n-1} \\ -\beta^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour tout entier n :

$$\varphi_n = \frac{\sqrt{5}}{5}(\alpha^n - \beta^n) = \frac{\sqrt{5}}{5}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n).$$

4. On a bien $\varphi_0 = \frac{\sqrt{5}}{5}(\alpha^0 - \beta^0) = 0$ et $\varphi_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}(\alpha^1 - \beta^1) = 1$.