UNIVERSITÉ DE PROVENCE LICENCE DE MATHÉMATIQUES - 2LMAT75

2003-2004

Algèbre et Géométrie - PARTIEL du 2 avril 2004

Ex. 1. (Questions de cours)

Énoncer les deux propositions du cours concernant les noyaux $K_i := \ker(P_i(f))$ associés à un endomorphisme $f \in \mathrm{End}(E)$ et un système $(P_1, \dots, P_k)$ de polynômes premiers entre eux deux à deux.

Ex. 2. (Jordanisation)

Soit $Q \in M_4(\mathbb{R})$ la matrice

$$Q := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On notera u l'endomorphisme $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ qu'elle définit.

1. Calculer le polynôme caractéristique de u et montrer que $\mathrm{Spec}(u) = \{1\}$.
2. Déterminer l'espace propre E_1 et l'espace caractéristique N_1 de u.
3. Déterminer l'indice de nilpotence de $Q - I_4$.
4. Préciser le polynôme minimal de Q.
5. Donner une forme canonique de Jordan de Q.
6. Préciser une base dans laquelle u a une forme canonique de Jordan et préciser la matrice de passage.

Ex. 3. On considère deux réels a et b, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$$

et l'endomorphisme $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ qu'elle définit. Déterminer en fonction de a et b

1. le polynôme caractéristique de v, ses sous-espaces propres,
2. ses sous-espaces caractéristiques,
3. son polynôme minimal,
4. une forme réduite de Jordan.

Ex. 4. On pose

$$F := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \ .$$

1. Diagonaliser F, en précisant une matrice de passage P.
   On a donc en particulier $D = P^{-1}FP$, où D est une matrice diagonale.
   On posera également $\mathrm{Spec}(F) := \{\alpha, \beta\}$, avec $\alpha \geq \beta$.
   Indication : les valeurs propres sont irrationnelles.
2. On définit la suite de FIBONACCI $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ par les conditions :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi_{n+2} = \varphi_{n+1} + \varphi_n$;
   (b) $\varphi_0 = 0$;
   (c) $\varphi_1 = 1$.
   Démontrer par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $\begin{pmatrix} \varphi_{n+1} \\ \varphi_n \end{pmatrix} = F^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
3. (Formule de BINET) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ calculer φ_n en fonction de α et β en utilisant le fait que φ_n est égal à la seconde composante du vecteur
   $$F^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = PD^nP^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$
4. Vérifier que la formule obtenue au 3 satisfait bien aux conditions énoncées au 2.