Exercice 1. Donnez les racines de :

1. $X^2 + X - 20$ **2.** $X^2 + X + 1$ **3.** $X^2 - 2X + 5$

4. $3X^2 - 2X + \dfrac{10}{3}$ **5.** $X^3 + 3X^2 + X - 1$ **6.** $X^4 + 1$

7. $3X^4 - 2X^2 - 2$

Exercice 2. Soit P un polynôme à coefficients réels et $\alpha < \beta$ deux racines de P. En utilisant le théorème de Rolle montrer qu'il existe une racine γ de P' dans $]\alpha,\beta[$.

Exercice 3. Soit n un nombre entier et x_0 un réel. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(x_0) \end{array}$$

est linéaire et donc continue.

Exercice 4. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que si $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de P alors $\overline{\alpha}$ est aussi racine de P.

2. En utilisant le théorème de d'Alembert déduire que les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont de degré 2.

Exercice 5. **Formules de Cardan**

1. Soit $P(X) = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ un polynôme de degré 3. Montrer que α est une racine de P si et seulement si $\beta = \alpha + \dfrac{a_2}{3a_3}$ est racine d'un polynôme $Q(Z) = Z^3 + pZ + q$ où p et q sont des nombres que l'on calculera.

2. Soit β une racine de Q. On pose $\beta = u + v$ avec $3uv + p = 0$. Montrer que u^3 et v^3 sont les racines y_1 et y_2 d'un polynôme de degré 2 que l'on explicitera.

3. Comment faut-il associer les racines cubiques de y_1 et y_2 pour que leur somme soit racine de Q

4. Trouver les racines de $X^3 - 2X - 12$ et $X^3 - 15X - 4$

Exercice 6. **1.** Montrer que si α est racine double d'un polynôme P alors α est racine du polynôme dérivé P'.

2. En déduire que P a une racine double dans $\mathbb{C}$ si et seulement si P et P' ne sont pas premiers entre eux.

3. Soit $P(X) = X^3 + pX + q$ a quelle condition sur p et q, P a-t'il une racine double? Une racine triple?

4. Si $4p^3 + 27q^2 = 0$ donner les racines de P.

Exercice 7. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ de racines deux à deux distinctes $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$.

1. On suppose n pair et que le coefficient dominant de P est positif. Montrer que

$$P(\alpha_1 - 1), P(\frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2}), \ldots, P(\frac{\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1}}{2}), P(\alpha_n + 1)$$

sont strictement positifs alors que

$$P(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}), P(\frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2}), \ldots, P(\frac{\alpha_{n-1} + \alpha_n}{2})$$

sont strictement négatifs.

2. En utilisant l'exercice 3, montrer qu'il existe un ouvert U_0 de $\mathbb{R}_n[X]$ contenant P tel que pour tout polynôme Q dans U_0, $Q(\alpha_1 - 1) > 0$. Montrer de même qu'il existe un ouvert U_1 de $\mathbb{R}_n[X]$ contenant P tel que pour tout polynôme Q dans U_1, $Q(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}) < 0$.

3. En déduire qu'il existe un ouvert U de $\mathbb{R}_n[X]$ contenant P tel que pour tout polynôme Q dans U, Q a n racines réelles distinctes situées dans les intervalles

$$]\alpha_1 - 1, \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}[,]\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}, \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2}[, \ldots,]\frac{\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1}}{2}, \frac{\alpha_{n-1} + \alpha_n}{2}[\text{ et }]\frac{\alpha_{n-1} + \alpha_n}{2}, \alpha_n + 1[.$$

4. En déduire que l'ensemble V des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ ayant n racines distinctes dans $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$.

5. Montrer que l'application

$$\begin{array}{ccl} V & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \min\{\alpha | P(\alpha) = 0\} \end{array}$$

est continue.

Exercice 8. Soit P un polynôme à coefficients complexes et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ses racines complexes avec multiplicité : $P(X) = \lambda(X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_n)$.

1. Exprimer le polynôme dérivé P' de P.

Posons pour $i = 1, \ldots, n$ et γ un nombre, $a_i = \dfrac{P(\gamma)\overline{P(\gamma)}}{(\gamma - \alpha_i)\overline{(\gamma - \alpha_i)}}$.

2. Montrer que si γ est une racine de P' alors

$$\gamma = \frac{1}{\sum_{i=1}^n a_i} \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i$$

3. En déduire que γ est dans l'enveloppe convexe des α_i.

Exercice 9. Trouver une parabole passant par les trois points donnés.

1. $A(0{,}2)$, $B(1{,}4)$, $C(2{,}12)$

2. $A(-2{,}13)$, $B(1,-2)$, $C(3,-2)$

3. $A(-1,-6)$, $B(1{,}0)$, $C(5{,}60)$

Exercice 10. Trouver une courbe de degré 3 passant par

1. $A(-1{,}2)$, $B(0,-4)$, $C(1,-10)$, $D(2,-10)$

2. $A(1{,}7)$, $B(2{,}23)$, $C(3{,}61)$, $D(4{,}133)$

Exercice 11. Soit m un nombre. Trouver une parabole passant par $A(1,-1)$, $B(2,-4)$, $C_m(3{,}2m-7)$.

Exercice 12. Montrer que la fonction qui à $2n+2$ nombres $(x_0,y_0),\ldots,(x_n,y_n)$ associe le polynôme d'interpolation de Lagrange P de degré n tel que $P(x_0)=y_0,\ldots,P(x_n)=y_n$ est continue sur son domaine de définition.

Exercice 13. Soit $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$. Donner le polynôme d'interpolation de Lagrange de f pour :

1. $x_0=-1$ $\quad$ $x_1=1$

2. $x_0=-1$ $\quad$ $x_2=0$ $\quad$ $x_1=1$

3. $x_0=-1$ $\quad$ $x_3=\dfrac{-1}{2}$ $\quad$ $x_2=0$ $\quad$ $x_4=\dfrac{1}{2}$ $\quad$ $x_1=1$