Exercice 1. Sur $\mathbb{R}[X]$ on défini :

$$(P|Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2).$$

1. Est-ce un produit scalaire ?

2. On se restreint maintenant à $\mathbb{R}_2[X]$, est-ce un produit scalaire ?

Exercice 2. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ et

$$(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt.$$

1. Montrer que c'est un produit scalaire.

2. Calculer $\|X\|$, $\|X^2+1\|$, $(X^3-2|5X+1)$.

3. Trouver un polynôme orthogonal à 7, $X-8$ et $3X^2-71X+89$.

Soit $\mathcal{I} = \{P \in \mathbb{R}[X] | P \text{ impair}\}$.

4. Montrer que si $P \in \mathbb{R}_3[X]$ est orhtogonal à $\mathcal{I}$, alors P est nul.

On se propose maintenant de montrer que $\mathcal{I}^\perp = \{0\}$. Pour cela on choisit un polynôme P de degré d, orthogonal à $\mathcal{I}$.

5. Exprimer $I_0(n) = n(n+1)\cdots(n+d)\int_0^1 P(t)t^{n-1}\,dt$ en fonction des coefficients de P et montrer que c'est un polynôme en n dont on déterminera le degré et le terme constant.

6. Montrer que I_0 a une infinité de racines et en déduire que le terme constant de P est nul.

7. Montrer que $I_1(n) = n(n+1)\cdots(n+d-1)\int_0^1 P(t)t^{n-2}\,dt$ est un polynôme en n qui a une infinité de racines et donc que le coefficient du terme de degré 1 de P est nul.

8. Conclure que $\mathcal{I}^\perp = \{0\}$.

Exercice 3. On considère sur $E = \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ le produit scalaire

$$(f|g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)\,dt.$$

Soit $\mathcal{P} = \{f \in E | f \text{ paire}\}$ et $\mathcal{I} = \{f \in E | f \text{ impaire}\}$.

1. Montrer que ce sont deux sous-espaces vectoriels.

2. Montrer que $\mathcal{P} \oplus \mathcal{I} = E$.

3. Montrer que $\mathcal{P} \perp \mathcal{I}$.

4. Soit $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - 5$, trouver les projetés orthogonaux de f sur $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$.

5. Soit $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)(x+3)}$ trouver les projetés orthogonaux de f sur $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$.

Exercice 4. Soit $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ muni de la norme L^2 et $F = \{f \in E | f(a) = 0\}$.

1. Montrer que F est un idéal de E.

2. Montrer que si g est orthogonal à F alors g^2 aussi.

3. En déduire que $F^\perp = \{0\}$.

Exercice 5. Projection orthogonal dans les pré-hilbertiens réels

Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Soit V un sous-espace vectoriel de E

1. Montrer que $V^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de E.

2. Montrer que $\overline{V} \subseteq V^{\perp\perp}$.

On suppose maintenant que V est complet. Soit x un élément de E on va montrer que la projection orthogonale de x sur V existe.

3. Soit $y_0 \in V$. Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

$$\Updownarrow \begin{array}{ll} (i) & \|x - y_0\| = \inf\{\|x - y\|, y \in V\} \\ (ii) & (x - y_0) \perp V \end{array}$$

4. Soit y,y' deux éléments de V. Montrer que

$$\|y - y'\|^2 = 2(\|x - y\|^2 + \|x - y'\|^2) - 4\|x - \frac{y + y'}{2}\|^2.$$

5. En déduire que si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite telle que

$$\lim_{n\to\infty} \|x - y_n\| = \inf\{\|x - y\|, y \in V\}$$

alors $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

6. Conclure que si V est complet alors pour tout x dans E il existe y dans V tel que $(x - y)$ est orthogonal à V.

7. En déduire que si V est complet $E = V \oplus V^\perp$ et $V^{\perp\perp} = V$.