

**Exercice 1.** On considère la norme  $L^2$  sur  $\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$  (c'est-à-dire le produit scalaire  $(f|g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$ ).

1. Orthonormaliser la base  $(1, X, X^2, X^3)$  de  $\mathbb{R}_3[X]$ .

2. Approximer la fonction  $f$  telle que  $\forall x \in [-1,1], f(x) = \frac{1}{X+2}$ , par la méthode des moindres carrés, par des polynômes de degré 1 et 2.

**Exercice 2.** 1. Calculer  $\int_0^1 \sin t dt$ ,  $\int_0^1 t \sin t dt$  et  $\int_0^1 t^2 \sin t dt$ .

2. Orthonormaliser la base  $(1, X, X^2)$  de  $\mathbb{R}_2[X]$  pour le produit scalaire associé à la norme  $L^2$  sur  $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ .

3. En déduire la parabole la plus proche de sinus sur  $[0,1]$  au sens des moindres carrés.

**Exercice 3.** Soit  $n$  un entier. Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions dans l'espace vectoriel  $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$  muni du produit scalaire associé à la norme  $L^2$ . Soient  $P$  et  $Q$  leurs approximations au sens des moindres carrés dans  $\mathbb{R}_n[X]$ .

1. Rappeler les conditions d'orthogonalité que vérifient  $f, g, P, Q$  et  $\mathbb{R}_n[X]$ .

Soit  $V$  le sous-espace vectoriel engendré par  $\mathbb{R}_n[X]$  et  $f$ . Soit  $h$  le projeté orthogonal de  $g$  sur  $V$ .

2. Justifier l'existence de  $h$ .

3. Montrer que le triangle  $(f, g, h)$  est rectangle en  $h$  et que  $\|f - h\| \leq \|f - g\|$ .

4. Montrer que  $h - Q + P - f$  est orthogonal à  $Q - P$  et en déduire que

$$\|h - f\|^2 = \|Q - P\|^2 + \|h - Q + P - f\|^2.$$

5. Déduire des questions précédentes que  $\|Q - P\| \leq \|g - f\|$ .

6. Montrer que la fonction qui à  $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$  associe son approximation par un polynôme de degré plus petit que  $n$  est uniformément continue. Remarquer aussi que cette fonction est linéaire.

**Exercice 4.** On se place dans  $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$  muni de la norme  $L^2$ .

1. Montrer que  $(1, \sqrt{2} \sin(2k\pi x), \sqrt{2} \cos(2k'\pi x))_{k,k' \in \mathbb{N}^*}$  est une base orthonormée d'un sous-espace noté  $V$ .

On considère la fonction  $f$  telle que  $\forall x \in [0,1], f(x) = |x - \frac{1}{2}|$ .

2. Calculer  $a_k = \int_0^1 f(t) \cos(2k\pi t) dt$  pour  $k \in \mathbb{N}$ .

3. Calculer  $b_k = \int_0^1 f(t) \sin(2k\pi t) dt$  pour  $k \in \mathbb{N}^*$ .

4. Montrer que  $\forall x \in [0,1[$ , la série  $\frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cos(4k\pi x)}{(2k+1)^2 \pi^2}$  est convergente.

5. Montrer que la série  $\frac{1}{4} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(2k\pi x) + b_k \sin(2k\pi x))$  converge normalement sur  $\mathbb{R}$ .

6. Quelle est à votre avis la somme de cette série?

---

21 février 1944 — 21 février 2004 — anniversaire de l'exécution du groupe Manouchian

L'Affiche rouge

Vous n'avez réclamé la gloire ni les larmes  
Ni l'orgue, ni la prière aux agonisants  
Onze ans déjà, que cela passe vite onze ans  
Vous vous étiez servi simplement de vos armes  
La mort n'éblouit pas les yeux des partisans.  
Vous aviez vos portraits sur les murs de nos villes  
Noirs de barbe et de nuit, hirsutes, menaçants  
L'affiche qui semblait une tache de sang  
Parce qu'à prononcer vos noms sont difficiles  
Y cherchait un effet de peur sur les passants.  
Nul ne semblait vous voir Français de préférence  
Les gens allaient sans yeux pour vous le jour durant  
Mais à l'heure du couvre-feu des doigts errants  
Avaient écrit sous vos photos «Morts pour la France»  
Et les mornes matins en étaient différents.  
Tout avait la couleur uniforme du givre  
À la fin février pour vos derniers moments

Et c'est alors que l'un de vous dit calmement :

«Bonheur à tous, bonheur à ceux qui vont survivre  
Je meurs sans haine en moi pour le peuple allemand.»  
Adieu la peine et le plaisir. Adieu les roses  
Adieu la vie. Adieu la lumière et le vent  
Marie-toi, sois heureuse et pense à moi souvent  
Toi qui vas demeurer dans la beauté des choses  
Quand tout sera fini plus tard en Erevan.  
Un grand soleil d'hiver éclaire la colline  
Que la nature est belle et que le cœur me fend  
La justice viendra sur nos pas triomphants  
Ma Mélinée, ô mon amour, mon orpheline  
Et je te dis de vivre et d'avoir un enfant.  
Ils étaient vingt et trois quand les fusils fleurirent  
Vingt et trois qui donnaient le cœur avant le temps  
Vingt et trois étrangers et nos frères pourtant  
Vingt et trois amoureux de vivre à en mourir  
Vingt et trois qui criaient la France en s'abattant.

Louis Aragon, le Roman inachevé, 1956.