Exercice 1. Une variable aléatoire X à valeur dans $\mathbb{N}$ suit une loi de Poisson si pour tout entier n, $P(X = n) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}$.
Vérifier que cette relation défini bien une v.a. à valeurs entières et calculer son espérance.

Exercice 2. Soient $p, q \in]0, 1[$, $p + q = 1$. On suppose qu'une variable aléatoire X à valeur dans $\mathbb{N}$ suit la loi $P(X = n) = q^n p$.

1. Montrer que cela définit bien la loi d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

2. Montrer que cette loi est «sans mémoire» au sens où pour tous entiers n et m

$$P(X \geq n + m | X \geq n) = P(X \geq m)$$

3. Calculer l'espérance de X.

4. Proposer une expérience aléatoire où une telle loi aparait.

Exercice 3. Calculer l'espérance et la variance des lois vues en cours (uniforme, exponentielle, gaussienne).

Exercice 4. Soit T le temps d'attente du bus 32 le matin à la Belle-de-Mai. On suppose d'abord que T suit une loi exponentielle qui décroît avec un taux de 3 par heure.

1. Quelle est la probabilité d'attendre le bus au moins un quart d'heure ?

2. Quel est le temps d'attente moyen ?

3. Sachant qu'on a déjà attendu un quart d'heure, quelle est la probabilité d'attendre au moins un quart d'heure de plus ?

4. On suppose maintenant que T suit une loi uniforme entre 0 et 40 minutes. Reprendre les trois premières questions.

5. Quel modèle semble le mieux adapté à la RTM ?

Exercice 5. Une v.a.r X suit une loi de Cauchy de paramètre $a > 0$ (c'est-à-dire que la densité g de X est $g(x) = \frac{a}{\pi(x^2+a^2)}$).

1. Vérfier que g est bien une densité sur $\mathbb{R}$.

2. calculer l'espérance de X.

Exercice 6. On laisse tomber une aiguille de 5cm sur un parquet ayant des lattes de 5cm de large. Calculer la probabilité que l'aiguille chevauche l'interstice entre deux lattes.
Indication : On notera $P = (X, \theta)$ la variable aléatoire qui modélise la position de l'aiguille. $X \in [0, 5[$ est la distance en cm entre la tête de l'aiguille et l'interstice le plus proche situé à sa gauche, et $\theta \in [0, 2\pi[$ est l'angle entre la direction de l'aiguille et la direction des lattes. X et θ sont deux variables aléatoires uniformes indépendantes ce qui entraîne que si A est une partie de $[0, 5[\times[0, 2\pi[$, la probabilité que la position de l'aiguille soit dans A est

$$\mathbb{P}(P \in A) = \oint_{(x,\theta)\in A} \frac{dx}{5}\frac{d\theta}{2\pi}.$$