Exercice 1. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x)^n\,dx$.

Exercice 2. Soit $\alpha \geq 0$. Étudier la convergence de la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ f_n\ :\ \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & f_n(x)=n^\alpha x e^{-nx}\end{array}.$$

Exercice 3. Montrer que toute fonction continue sur $[a,b]$ est limite uniforme de fonctions en escaliers.

Exercice 4. Montrer que toute fonction continue sur $[a,b]$ est limite uniforme de fonctions continues affines par morceaux.

Exercice 5. **1.** Soit $a<b$. Montrer que pour toute fonction f de $\mathcal{C}^1([a,b])$,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin(nx)=0.$$

2. En déduire que pour toute fonction f continue sur $[a,b]$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_a^b f(x)\sin(nx)=0$.

Exercice 6. **1.** Soit $n\in\mathbb{N}$ et $A\in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'application $\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & M_n(\mathbb{R})\\ \lambda & \mapsto & A-\lambda I_n\end{array}$ est continue.

2. En déduire que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$.

3. Montrer que pour toutes matrices $A,B\in M_n(\mathbb{R})$, AB et BA ont même polynôme caractéristique (le montrer d'abord pour B inversible et utiliser la question précédente).

Exercice 7. **1.** Soit $P(X)=aX^2+bX+c$ un polynôme de degré 2. Calculer $\int_x^y P(t)\,dt$ en fonction de x, y, a, b et c.

2. En déduire $\int_x^y P(t)\,dt$ en fonction de $y-x$, $P(x)$, $P(y)$ et $P(\frac{x+y}{2})$.

3. Montrer que pour tout polynôme P de degré au plus 3 on a

$$\int_x^y P(t)\,dt=\frac{y-x}{6}(P(x)+4P(\frac{x+y}{2})+P(y))\text{ (formule de Simpson).}$$