Exercice 1. Soit E un espace vectoriel, muni d'un produit scalaire, V un sous-espace vectoriel de E, u et v deux vecteurs de E

1. Rappelez la définition de : « v est le projeté orthogonal de u sur V »

2. Montrez que si v est le projeté orthogonal de u sur V alors

$$\|u - v\| = \inf\{\|u - w\| \mid w \in V\}.$$

Exercice 2. On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0;2], \mathbb{R})$ des fonctions continues de $[0;2]$ dans $\mathbb{R}$, et pour toutes fonctions $f, g \in E$

$$(f|g) = \frac{1}{2}\int_0^2 f(t)g(t)\,dt.$$

1. Montrez que $(.|.)$ est un produit scalaire sur E.

2. Orthonormalisez la base $(1, X, X^2)$ du sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 3. **1.** Calculez $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\,dt$.

On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0;\frac{\pi}{2}], \mathbb{R})$ muni de la norme L_2.

$(\sqrt{\frac{2}{\pi}}, \frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{6}{\pi}}(X - \frac{\pi}{4}))$ est une base orthonormée du sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_1[X]$ de E.

2. Trouvez la fonction affine la plus proche (au sens de la norme L_2) de la fonction de $E : x \mapsto \cos x$.

Bonne chance