**Exercice 1.** **(Cours)** Soit $E$ un espace vectoriel muni d'un produit scalaire et de la norme $\| \ \|$ associée. Soit $V$ un sous-espace vectoriel de $E$, $u$ un élément de $E$ et $v_0$ un élément de $V$. Montrer que $v_0$ est la projection orthogonale de $u$ sur $V$ si et seulement si

$$\|u - v_0\| = \inf_{v \in V} \|u - v\|$$

**Exercice 2.** Un QCM contient 5 questions. Pour chaque question on doit choisir entre deux réponse l'une bonne et l'autre mauvaise. Chaque bonne réponse rapporte 2 points et chaque mauvaise réponse rapporte 0 points. Un étudiant répond au hasard à chaque question.

**1.** Proposer un espace des possibles pour cette expérience.

**2.** Quelle est la probabilité d'avoir exactement deux bonnes réponses ?

**3.** On appelle $X$ la note de l'étudiant. Calculer P(X=8).

**4.** Donner la loi de $X$.

**5.** Si une centaine d'étudiants passent cet examen et qu'ils répondent tous au hasard, à quelle répartition des notes doit-on s'attendre ? (justifier votre réponse)

**Exercice 3.** *(Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes)*

**1.** Soient $A_0(x_0,y_0)$, $A_1(x_1,y_1)$ et $A_2(x_2,y_2)$ trois points du plan et leurs coordonnées, on suppose que les abscisses $x_0$, $x_1$ et $x_2$ sont deux à deux disctinctes. Soit $P(X) = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ un polynôme de degré 3. On appelle aussi $P$ la courbe $y = P(x)$ représentative de $P$.

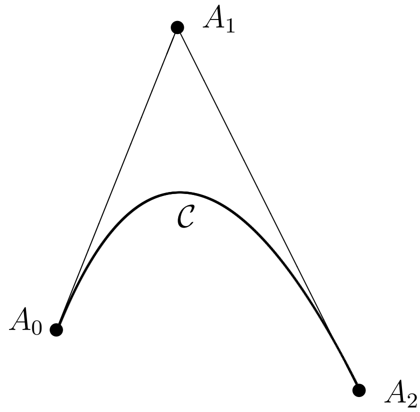
**a.** Écrire les conditions vérifiées par $(a_0,a_1,a_2,a_3)$ pour que $P$ passe par $A_0$ et $A_2$.

**b.** Écrire les conditions supplémentaires pour que $P$ soit tangente à la droite $(A_0A_1)$ en $A_0$ et à $(A_2A_1)$ en $A_2$.

**c.** Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} {x_0}^3 & {x_0}^2 & x_0 & 1 \\ {x_2}^3 & {x_2}^2 & x_2 & 1 \\ 3{x_0}^2 & 2x_0 & 1 & 0 \\ 3{x_2}^2 & 2x_2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son déterminant.

**d.** En déduire qu'il existe un unique polynôme de degré 3 vérifiant les conditions des questions a et b.

**e.** Montrer que l'applicaition qui a trois points $(A_0,A_1,A_2)$ du plan associe le polynôme $P$ de degré 3 déterminé aux questions précédentes est continue sur son domaine de définition.




**2. Courbes de Bézier avec $n = 2$**

Soient $A_0(x_0,y_0)$, $A_1(x_1,y_1)$ et $A_2(x_2,y_2)$ trois points du plan et leurs coordonnées. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ soit $M(t)$ le barycentre du système de points pondérés $\{(A_0,(1-t)^2),(A_1,2t(1-t)),(A_2,t^2)\}$ et $(x(t),y(t))$ ses coordonnées. Soit $\mathcal{C}$ la courbe formée par les points $\{M(t)|t \in \mathbb{R}\}$ elle est paramétrée par $t$.

**a.** Montrer que $M(0) = A_0$ et $M(1) = A_2$.

**b.** Montrer que pour $t \in \mathbb{R}$, $\left\{ \begin{array}{ll} x(t) & = (1-t)^2 x_0 + 2t(1-t)x_1 + t^2 x_2 \\ y(t) & = (1-t)^2 y_0 + 2t(1-t)y_1 + t^2 y_2 \end{array} \right.$

**c.** Montrer que $\mathcal{C}$ est tangente à $(A_0A_1)$ en $t = 0$ et à $(A_2A_1)$ en $t = 1$.

**d.** Déterminer $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \frac{y(t)}{x(t)}$.

**e.** Si $x_1 = \dfrac{x_0 + x_2}{2}$ exprimer $t$ puis $y(t)$ en fonction de $x(t)$ et en déduire que $\mathcal{C}$ est une parabole.

**3. Courbes de Bézier avec échantillonnage régulier**

On rappelle que les polynômes de Bernstein sont donnés par $B_n^i(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i}$ avec $i,n \in \mathbb{N}$.

**a.** Montrer que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} B_n^i(t) = 1$ et que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i B_n^i(t) = nt$.

Soient $A_0(x_0,y_0),A_1(x_1,y_1),\ldots,A_n(x_n,y_n)$, $n+1$ points du plan. Pour $t \in \mathbb{R}$ on considère le barycentre $M(t)$ du système de points pondérés $\{(A_i,B_n^i(t))|i = 0,\ldots,n\}$ et $\mathcal{C}$ la courbe des points $\{M(t)|t \in \mathbb{R}\}$.

**b.** Montrer que si $x_i = \frac{i}{n}$ pour $i = 0,\ldots,n$, alors $\mathcal{C}$ est la courbe $y = P_n(x)$ d'un polynôme $P_n$ que l'on déterminera.

**c.** Soit $f$ une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $i,n \in \mathbb{N}$ on pose $x_i = \frac{i}{n}$ et $y_i = f(x_i)$ et on appelle $P_n$ le polynôme déterminé à la question précédente qui a pour courbe $\mathcal{C}$. Citer le théorème de Bernstein et en déduire que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f$ sur $[0,1]$.