Résultats, parenthèses et remarques croisés en cours et en TD

Dans ce document les «rappels» sont les résultats qui nous sont utiles dans ce cours et que vous devez connaître, les «parenthèses» sont soit des résultats déjà croisés, soit des résultats que vous rencontrerez peut-être plus tard ou ailleurs et qui constituent des digressions culturelles non-essentielles à la compréhension du cours. J'ai conservé l'ordre chronologique.

1. Parenthèse. $\aleph_0$ (aleph 0) est le cardinal des ensembles dénombrables (en bijection avec $\mathbb{N}$). Ex : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}^2$, $\mathbb{Q}[X]$.

$2^{\aleph_0}$ est le cardinal du continu (des ensembles en bijection avec $\mathbb{R}$). Ex : $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[X]$.

2. Rappel. L'ensemble $C^\infty(\mathbb{R})$ des fonctions C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre (un anneau et un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de dimension infinie ($2^{\aleph_0}$).

3. Rappel. Théorème des valeurs intermédiaires : *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ et y un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. alors il exite $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = y$.*

Le théorème reste vrai avec a, b, $f(a)$ ou $f(b)$ égal à $\pm\infty$ ou avec un intervalle ouvert en utilisant les limites.

4. Rappel. Théorème de Rolle : *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a) = f(b)$ alors il existe $\xi \in]a,b[$ tel que $f'(\xi) = 0$.*

Théorème des accroissements finis : *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ alors il existe $\xi \in]a,b[$ tel que*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

5. Rappel. $\mathbb{R}$ est complet : toute partie minorée de $\mathbb{R}$ a une borne inférieure.

6. Rappel. L'image d'un compact par une application continue est un compact. En particulier une application continue à valeurs réelles sur un compact atteind son minimum et son maximum.

7. Parenthèse. La fonction $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais sa dérivée n'est pas continue en 0.

8. Parenthèse. La fonction dérivée d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifie le théorème des valeurs intermédiaires, même lorsque cette dérivée n'est pas continue.

9. Rappel. La somme des racines de $aX^2 + bX + c$ est $\frac{-b}{a}$ et leur produit est $\frac{c}{a}$.

Plus généralement si on considère le polynôme $a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$, $\frac{a_0}{a_n}$ est $(-1)^n$ fois le produit des racines, $\frac{-a_{n-1}}{a_n}$ est la somme des racines, et $(-1)^i \frac{a_{n-i}}{a_n}$ est la somme de tous les produits de i racines.

10. Rappel. $1 + X + X^2 + \cdots + X^n = \dfrac{X^{n+1} - 1}{X - 1}$.

$Y^{n+1} - X^{n+1} = (Y - X)(Y^n + Y^{n-1}X + \cdots + YX^{n-1} + X^n)$.

11. Rappel. Une fonction linéaire sur un espace vectoriel normé de dimension finie est continue.

12. Parenthèse. Un nombre est *algébrique* si il est racine d'un polynôme à coefficients rationnels (ex : $\sqrt{2}$, i, $\sqrt[5]{23} - \frac{7}{3}$).

Un nombre est transcendant s'il n'est pas algébrique (ex : π, e).

Il y a un nombre dénombrable de nombres algébriques et beaucoup plus ($2^{\aleph_0}$) de nombres transcendants.

13. Parenthèse. Quadrature du cercle : il est impossible de construire à la règle et au compas un disque de surface égale à celle d'un carré donné.

14. Parenthèse. Les nombres constructibles à la règle et au compas sont les nombres algébriques dont le groupe de Galois est d'ordre une puissance de 2. (Le problème de la quadrature du cercle revient à construire π qui n'est pas algébrique à la règle et au compas, diviser un gâteau en 7, revient de même à construire $e^{\frac{2i\pi}{7}}$ dont le groupe de Galois est d'ordre 6 ce qui est impossible)

15. Parenthèse. Quotient d'un anneau par un idéal. Si P est un polynôme irréductible sur k alors $k[X]/P$, le quotient de l'anneau des polynômes par l'idéal engendré par P est un corps de dimension finie (le degré de P) au-dessus de k.

On vérifie aisément que $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - 2) \simeq \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est le plus petit corps contenant $\mathbb{Q}$ et $\sqrt{2}$.

16. Parenthèse. $\mathbb{Z}[X]$ n'est pas principal. L'idéal engendré par 2 et X n'est pas monogène.

En effet, pour effectuer une division euclidienne de polynômes il faut que le coefficient dominant soit inversible.