Exercice 1. Soit m un réel et $A = (-1, 2)$, $B = (1, 0)$ et $C_m = (m, m-1)$ trois points du plan $\mathbb{R}^2$.

1. À quelles conditions sur m existe-t-il une unique parabole passant par A, B et C_m ?

2. Donner la parabole P_m passant par ces trois points quand elle existe.

3. Montrer que l'application $m \mapsto P_m$ est continue sur son domaine de définition.

4. Déterminer $\lim_{m \to 1} P_m$ et interpréter graphiquement ce résultat.

Exercice 2. *Préambule. L'ingénieure veut construire un pont suspendu, d'une portée de 100m soutenu par des piles de 25m de haut. Elle sait que, pour minimiser la torsion du cable, la hauteur du cable au-dessus du tablier du pont (qui est aussi la longueur des filins reliants le cable au tablier) doit être $H(x) = 25ch(\frac{x}{50})$, la hauteur étant exprimée en mètre et x étant la distance au centre du pont. Malheureusement le logiciel d'architecture qu'elle utilise ne permet d'utiliser que des polynômes et non pas les fonctions exponentielles. Elle cherche donc un polynôme dont la courbe s'approche de celle donnée par le cosinus hyperbolique. Pour simplifier les calculs on se débarasse ici des constantes en étudiant $h(x) = ch(\frac{x}{2})$.*

On rappelle que pour tout réel x,

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x) \quad \mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x) \quad \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$$

et que ch est paire et sh est impaire.

On considère sur $E = \mathcal{C}^\infty([-2, 2])$ la norme L_2, c'est-à-dire le produit scalaire donné par :

$$\forall f, g \in \mathcal{C}^\infty([-2, 2]), \quad (f|g) = \int_{-2}^{2} f(x)g(x)\, dx.$$

On considère la fonction $h \in E$ telle que pour tout $x \in [-2, 2]$, $h(x) = \mathrm{ch}(\frac{x}{2})$

1. Orthonormaliser la base $1, X, X^2$ du sous-espace $\mathbb{R}_2[X]$ de E.

2. Calculer $I = \int_{-2}^{2} \mathrm{ch}(\frac{x}{2})\, dx$, $J = \int_{-2}^{2} x\mathrm{ch}(\frac{x}{2})\, dx$ et $K = \int_{-2}^{2} x^2\mathrm{ch}(\frac{x}{2})\, dx$

3. Trouver la meilleure approximation au sens de la norme L_2 de h par un polynôme de degré 2.

La torsion subie par le cable au point x est donnée par $T(x) = \rho g\sqrt{1 + H'(x)^2} - tH''(x)$, où ρ est la masse linéaire du cable, g la pesanteur, et t la tension horizontale du cable. On se débarasse une fois de plus des constantes.

Pour $f \in E$ et $x \in \mathbb{R}$, on définit $t_f(x) = \sqrt{1 + f'(x)^2} - f''(x)$.

4. Donner $t_{P_h}(x)$ pour la parabole P_h trouvée à la question précédente. Donner son maximum.

Afin de minimiser la torsion des cables, on considère le produit scalaire

$$(f|g) = \int_{-2}^{2} f(x)g(x)\, dx + \int_{-2}^{2} t_f(x)t_g(x)\, dx.$$

5. Est-ce un produit scalaire sur E ?

Exercice 3. *Dans cet exercice on utilisera le formalisme rigoureux des probabilités mathématiques. C'est à dire qu'on commencera par traduire chaque question en langage mathématiques, notemment en précisant les événements dont on parle.*

Soit T_1 le temps d'attente d'un bus. On suppose que T suit une loi exponentielle qui décroît avec un taux de 2 par heure. C'est-à-dire que la densité de T_1 est donnée par $f(t) = 2e^{-2t}$ ($t \geq 0$ en heures).

1. Quelle est la probabilité d'attendre le bus au moins un quart d'heure.

2. Quelle est l'espérance du temps d'attente ? Sa variance ?

3. Sachant que l'on a déjà attendu un quart d'heure, quelle est la probabilité d'attendre au moins un quart d'heure de plus ?

À la suite de ce premier bus on doit attendre un deuxième bus lors d'une correspondance. Le temps d'attente, T_2, de ce deuxième bus suit la même loi que T_1. Le temps d'attente total du trajet est donc $T = T_1 + T_2$. On suppose que T_1 et T_2 sont indépendants.

4. Donner l'espérance et la variance de T.

5. Calculer la probabilité d'attendre au total plus d'une heure. *Indication : on rappelle que, puisque T_1 et T_2 sont indépendants, si A est une partie de $(\mathbb{R}^+)^2$,*

$$P((T_1, T_2) \in A) = \oint_{(t_1,t_2)\in A} f(t_1)f(t_2)\, dt_1\, dt_2.$$

6. Montrer que T suit une loi de probabilité de densité $g(t) = 4te^{-2t}$ pour $t \geq 0$.

Bonne chance