3 heures – Documents et calculatrices interdits.

Exercice 1. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. On rappelle que f est **positive** si $\forall t \in [0,1],\ f(t) \geq 0$ et que f est **non-nulle** si $\exists t \in [0,1],\ f(t) \neq 0$.

1. Montrer que si f est positive et non-nulle $(P|Q) = \int_0^1 f(t)P(t)Q(t)\,dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2. On se propose de montrer la réciproque de la question précédente.

a. Montrer que si f n'est pas positive, alors il existe une fonction g continue et positive sur $[0,1]$ telle que $a = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt < 0$.

b. En utilisant le théorème de STONE-WEIERSTRASS montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall t \in [0,1],\ |g(t) - P^2(t)| < \frac{|a|}{2M}$ où M est un majorant de $|f|$.

c. En déduire que $\int_0^1 f(t)P^2(t)\,dt < 0$.

d. Conclure que $(P|Q) = \int_0^1 f(t)P(t)Q(t)\,dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ si et seulement si f est positive et non-nulle.

3. **a.** Montrer que pour tous réels a et b, $(a,b) \neq (0,0)$, $\frac{11}{12}a^2 + \frac{7}{3}ab + \frac{3}{2}b^2 > 0$

b. Montrer que $(P|Q) = \int_0^1 (5t-1)P(t)Q(t)\,dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_1[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 1.

c. Cette question est-elle contradictoire avec la question précédente?

Exercice 2. Soit $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ deux points du plan, $x_A \neq x_B$.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_{A,B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ passant par A et B et dont la tangente en A est horizontale.

2. Montrer que l'application qui à deux points (A,B) du plan associe $P_{A,B}$ est continue sur son domaine de définition.

3. Montrer que la courbe représentative du polynôme $aX^2 + bX + c$ passe par A et B si et seulement si $b = p - (x_A + x_B)a$ et $c = m + ax_Ax_B$ où $y = px + m$ est l'équation de la droite (AB).

4. Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ passant par A et B et dont les tangentes en A et B sont perpendiculaires.

Exercice 3. Soient $p,q \in]0,1[$, $p+q=1$. On suppose qu'une variable aléatoire X à valeur dans $\mathbb{N}$ suit la loi $P(X=n)=q^n p$.

1. Montrer que cela définit bien la loi d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

2. Montrer que cette loi est «sans mémoire» au sens où pour tous entiers n et m

$$P(X \geq n+m | X \geq n) = P(X \geq m)$$

3. Calculer l'espérance de X.

4. Proposer une expérience aléatoire où une telle loi aparait.

Soit Y une variable aléatoire, indépendante et de même loi que X.

5. Calculer l'espérance de $X+Y$.

6. Montrer que la loi de $X+Y$ est $P(X+Y=n)=(n+1)p^2q^n$.