Ce devoir est avant tout un exercice de rédaction. Vous devez être extrêmement rigoureux quant aux objets mathématiques que vous manipulez, en particulier les transformations du plan et leurs définitions.
Rappelons que pour montrer une égalité entre deux ensembles il faut montrer deux inclusions (exercices 4 et 5).

Transformations complexes du plan, homographies (le plan hyperbolique)

$\mathcal{P}$ est le plan affine, c'est-à-dire $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire $\mathbb{C}$. Vous êtes donc encouragés (même si cela n'est pas fait dans l'énoncé) à considérer que points et affixes sont la même chose. En particulier vous pouvez écrire à l'exercice 4 $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$, c'est-à-dire considérer aussi f comme une application de $\mathbb{C} - \{0\}$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 1. Translations.

1. Soit u un vecteur, donner la définition de la translation, t, de vecteur u.

2. Soit $a \in \mathbb{C}$. Montrer que l'application t qui à un point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = z + a$ est une translation. Cette application est notée :

$$t : \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \rightarrow & \mathcal{P} \\ M(z) & \mapsto & t(M) = M'(z+a) \end{array}.$$

Exercice 2. Homothéties.

1. Soit λ un réel non-nul et Ω un point, donner la définition de l'homothétie, h, de centre Ω et de rapport λ.

2. Soit $a \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$. Soit h l'application :

$$h : \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \rightarrow & \mathcal{P} \\ M(z) & \mapsto & h(M) = M'(\lambda z+a) \end{array}.$$

Montrer que h a un unique point fixe Ω (c'est-à-dire qu'il existe un unique point M tel que $h(M) = M$). Donner l'affixe de Ω.

3. Montrer que h est l'homothétie de centre Ω et de rapport λ.

Exercice 3. Rotations.

1. Soit θ un angle (c'est-à-dire un réel défini modulo 2π) et Ω un point, donner la définition de la rotation, r, de centre Ω et d'angle θ.

2. Soit θ un angle non-nul et $a \in \mathbb{C}$. Soit r l'application :

$$r : \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \rightarrow & \mathcal{P} \\ M(z) & \mapsto & r(M) = M'(e^{i\theta}z+a) \end{array}.$$

Montrer que r a un unique point fixe Ω et donner son affixe.

3. Montrer que r est la rotation de centre Ω et d'angle θ.

Exercice 4. Inversion.

On considère

$$f: \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \rightarrow & \mathcal{P} \\ M(z) & \mapsto & f(M) = M'(\frac{1}{\bar{z}}) \end{array}.$$

1. Pour quels points f est-elle définie ?

2. Montrer que l'ensemble des points fixes de f est le cercle unité.

3. Montrer que $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathcal{P}-\{O\}}$.

4. Soit $\mathcal{D}$ la droite verticale de partie réelle 1 : $\mathcal{D} = \{M(z) | z = 1 + iy, y \in \mathbb{R}\}$, et soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre le point A d'affixe $\frac{1}{2}$ de rayon $\frac{1}{2}$ privé de l'origine :
$\mathcal{C} = \{M(z) | z \neq 0 \text{ et } |z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}\}$. Montrer que $f(\mathcal{D}) = \mathcal{C}$.

Exercice 5. Homographie.

On considère maintenant

$$\varphi: \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \rightarrow & \mathcal{P} \\ M(z) & \mapsto & \varphi(M) = M'(\frac{3z-13}{z-3}) \end{array}.$$

1. Pour quels points φ est-elle définie ?

2. Montrer que φ a deux points fixes dont on déterminera les affixes.

3. Soit $\mathcal{C}_0$ le cercle de centre A d'affixe 3 et de rayon 2. Montrer que $\varphi(\mathcal{C}_0) = \mathcal{C}_0$.

4. Soit $\mathcal{D}$ la droite verticale de partie réelle 5 : $\mathcal{D} = \{M(z) | z = 5 + iy, y \in \mathbb{R}\}$, et soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre le point B d'affixe 2 de rayon 1 privé du point D d'affixe 3 :
$\mathcal{C} = \{M(z) | z \neq 3 \text{ et } |z - 2| = 1\}$. Montrer que $\varphi(\mathcal{D}) = \mathcal{C}$.

Exercice 6. Facultatif.

Soit $\mathbb{H}$ le demi-plan ouvert supérieur limité par l'axe réel : $\mathbb{H} = \{z | \mathrm{Im}(z) > 0\}$. On appelle <u>droite</u> de $\mathbb{H}$ les demi-cercles ouverts supérieurs dont le centre est situé sur l'axe réel et les demi-droites ouvertes verticales supérieures dont l'origine est sur l'axe réel.

1. Montrer que $f(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$ et $\varphi(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$.

2. (difficile) Montrer que f et φ transforment les <u>droites</u> en des <u>droites</u>.

$\mathbb{H}$ est le demi-plan de POINCARÉ*, c'est une représentation du plan hyperbolique. Le plan hyperbolique vérifie tous les axiomes d'*EUCLIDE *sauf le 5e : par un point il passe une infinité de parallèles à une <u>droite</u> donnée. Cette représentation est **conforme**, ce qui veut dire que les angles peuvent être mesurés avec un rapporteur : l'<u>angle</u> entre deux <u>droites</u> est l'angle entre leurs tangentes au point d'intersection. En traçant des triangles (trois points reliés par trois <u>droites</u>) on constate que la somme de leurs <u>angles</u> est strictement inférieure à π. Les homographies ($z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $ad - bc = 1$) et les anti-homographies ($z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $ad - bc = -1$) sont les isométries du demi-plan de* POINCARÉ*, en particulier elles conservent les <u>droites</u> et les <u>angles</u>.*