

On trouvera ici les notions de logique rencontrées et nécessaires dans le cours de « géométrie du plan et de l'espace » de première année de licence de mathématiques et informatique.

1. **Tiers exclu.** Un énoncé mathématiques est soit vrai soit faux.
2. **Théorème de complétude de GÖDEL.** Un énoncé est vrai si et seulement si il peut être démontré.

Les deux règles précédentes, auxquelles je donne des noms pompeux, sont avant tout des règles pour les étudiant-e-s. Toute infraction à ces règles sera lourdement sanctionnée.

3. **Calcul des prédicats.** Les énoncés mathématiques s'écrivent avec les symboles suivant dont on rappelle la table de vérité :

A	B	non A	A et B	A ou B	$A \Rightarrow B$	$A \iff B$
Vrai	Vrai	Faux	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Faux	Faux	Vrai	Faux	Faux
Faux	Vrai	Vrai	Faux	Vrai	Vrai	Faux
Faux	Faux	Vrai	Faux	Faux	Vrai	Vrai

4. *Contrairement à l'usage en français,* $(A \Rightarrow B) = ((\text{non } A) \text{ ou } B)$. On utilise aussi « si A alors B » ou même « A donc B » et toutes sortes de variantes (« nous en déduisons », « ainsi », etc.) au lieu de \Rightarrow .

5. $(A \iff B) = ((A \Rightarrow B) \text{ et } (B \Rightarrow A))$. Pour démontrer que $A \iff B$ il faut en général montrer que $A \Rightarrow B$ et que $B \Rightarrow A$.

On utilise aussi « si et seulement si » et « condition nécessaire et suffisante » à la place de \iff .

6. **Quantificateurs.** On utilise deux quantificateurs pour écrire des énoncés.

\forall : « quel que soit », « pour tout », « soit », etc.

\exists : « il existe ».

On rencontre aussi parfois $\exists!$ qui signifie « il existe un unique » et qui est un raccourci pour un énoncé un peu plus long.

7. **Variables, constantes et assimilées.**

Dans un énoncé toute variable doit être précédé d'un quantificateur.

C'est une règle absolue pour les étudiant-e-s. Y déroger entraînera systématiquement une sanction du type « qui est x ? » de la part du correcteur.

Les quantificateurs se placent avant la première utilisation de la variable. L'ordre des quantificateurs est très important.

8. Il existe quelques exceptions à la règle précédente :

Une **constante** ou un **paramètre** est une variable dont le quantificateur est placé en tout début d'un exercice ou d'un problème. L'usage veut qu'on mette parfois le quantificateur d'une constante à la fin de l'énoncé : « où C est une constante réelle ».

En analyse, dans l'énoncé $\int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$, t n'est pas une variable au sens de la logique, elle n'a pas besoin de quantificateurs.

En théorie des ensembles, dans l'énoncé $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$, x n'est pas non plus une variable au sens de la logique. Cet énoncé est un raccourci pour $\forall x((x \in A \cap B) \iff (x \in A \text{ et } x \in B))$.

9. **Négation.** $\text{non}(A \text{ ou } B) = ((\text{non}A) \text{ et } (\text{non}B))$.

$\text{non}(A \text{ et } B) = ((\text{non}A) \text{ ou } (\text{non}B))$.

$\text{non}(A \Rightarrow B) = (A \text{ et } (\text{non}B))$.

$\text{non}(\forall x P(x)) = (\exists x \text{ non } P(x))$.

$\text{non}(\exists x P(x)) = (\forall x \text{ non } P(x))$.

10. **Contraposée.** $(A \Rightarrow B) = ((\text{non } B) \Rightarrow (\text{non } A))$.