Aix-Marseille III – Licence 1re année – M2 **Partiel 2** T. Coulbois – 15 décembre 2004

Calculatrices, documents et téléphones interdits.
La rigueur et la qualité de la rédaction sont des éléments importants d'appréciation.
Barème : exercice 1 : 6 points, 2 : 4 points, 3 : 6 points, 4 : 4 points.
Durée : 1h30.

On trouvera dans les encadrés des solutions détaillées aux questions du partiel. Leur seul défaut est de ne pas contenir, pour des raisons techniques, de figures.

Exercice 1. (Cours)

1. Donner la définition de la colinéarité de deux vecteurs.

Deux vecteurs u et v sont colinéaires si, et seulement si, il existe deux réels λ et μ non tous les deux nuls, tels que $\lambda u + \mu v = \vec{0}$.

2. Soit u, v deux vecteurs de l'espace et λ un réel tel que $u = \lambda v$. Montrer que $u \wedge v = \vec{0}$.

Les coordonnées de u et v vérifient : $\begin{cases} x_u = \lambda x_v \\ y_u = \lambda y_v \\ z_u = \lambda z_v \end{cases}$. En calculant les coordonnées du produit vectoriel

$$u \wedge v = \begin{pmatrix} y_u z_v - y_v z_u \\ z_u x_v - z_v x_u \\ x_u y_v - x_v y_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda y_v) z_v - y_v (\lambda) z_v \\ (\lambda z_v) x_v - z_v (\lambda) x_v \\ (\lambda x_v) y_v - x_v (\lambda) y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Et donc $u \wedge v = \vec{0}$.

3. Soit u et v deux vecteurs de l'espace tels que $x_u \neq 0$ et $u \wedge v = \vec{0}$. Montrer que u et v sont colinéaires.

Posons $\lambda = \frac{x_v}{x_u}$, ce qui est possible car $x_u \neq 0$. On a alors évidemment : $x_v = \lambda x_u$. De plus vu la définition du produit vectoriel, les coordonnées de u et v vérifient : $x_u y_v - x_v y_u = 0$ et donc $y_v = \frac{x_v}{x_u} y_u = \lambda y_u$, et de même $x_u z_v - x_v z_u = 0$ et donc $z_v = \lambda z_u$. Ces trois relations montrent que $v = \lambda u$ où encore $\lambda u - 1.v = \vec{0}$, c'est-à-dire que u et v sont colinéaires.

Exercice 2. On considère les quatre points de l'espace

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. Donner un vecteur normal au plan contenant A, B et C.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le vecteur $n = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ est normal au plan contenant A, B et C.

2. Montrer que A, B, C et D sont coplanaires.

D'après la question précédente, le plan (ABC) a une équation cartésienne de la forme : $2x-3y+4z+d=0$ où d est un réel. A appartient à ce plan donc $2\times1-3\times(-1)+4\times0+d=0$ et donc $d=-5$.
Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc $2x-3y+4z-5=0$.
On vérifie aisément que les coordonnées de D vérifient cette équation : $2\times3-3\times(-1)+4\times(-1)-5=0$ et donc D appartient au plan (ABC).
Les points A, B, C et D sont coplanaires.

Exercice 3. Soit $A=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\mathcal{D}\ :\begin{cases}x-y+z+3=0\\x+y=0\end{cases}$.

1. Donner une équation paramétrique de (AB).

Un vecteur directeur de la droite (AB) est $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$ et A est un point de cette droite, donc une équation paramétrique de (AB) est :

$$(AB)\ :\begin{cases}x=1-t\\y=-1+2t\\z=2t\end{cases},\quad t\in\mathbb{R}.$$

2. Donner une équation paramétrique de $\mathcal{D}$.

Pour tout réels x,y,z, $\begin{cases}x-y+z+3=0\\x+y=0\end{cases}\iff\begin{cases}x=x\\y=-x\\z=-3-2x\end{cases}$. Une équation paramétrique de $\mathcal{D}$ est donc :

$$\mathcal{D}\ :\begin{cases}x=t'\\y=-t'\\z=-3-2t'\end{cases},\quad t'\in\mathbb{R}.$$

3. Montrer qu'il existe un unique point C de (AB) et un unique point D de $\mathcal{D}$, tels que (CD) est perpendiculaire à (AB) et $\mathcal{D}$. Déterminer les coordonnées de C et D.

D'après l'équation paramétrique de $\mathcal{D}$, $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.
Soit t et t' deux réels et $C(t)$ et $D(t')$ les points correspondants des droites (AB) et $\mathcal{D}$. Le vecteur $\overrightarrow{C(t)D(t')} = \begin{pmatrix} t'+t-1 \\ -t'-2t+1 \\ -2t'-2t-3 \end{pmatrix}$ est normal aux droites (AB) et $\mathcal{D}$ si, et seulement si, il est normal à $\overrightarrow{AB}$ et u.
Calculons :

$$\overrightarrow{C(t)D(t')}.\overrightarrow{AB} = 1-t-t'+2(-t'-2t+1)+2(-2t'-2t-3) = -7t'-9t-3$$

et

$$\overrightarrow{C(t)D(t')}.u = t'+t-1-(-t'-2t+1)-2(-2t'-2t-3) = 6t'+7t+4.$$

Le vecteur $\overrightarrow{C(t)D(t')}$ est normal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et u si, et seulement si,

$$\left\{ \begin{array}{c} -7t'-9t-3=0 \\ 6t'+7t+4=0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} t=2 \\ t'=-3 \end{array} \right.$$

Il y a donc un unique point $C = C(2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ de la droite (AB) et un unique point $D = D(-3) = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ de la droite $\mathcal{D}$ tels que la droite (CD) est perpendiculaire à (AB) et $\mathcal{D}$.

Exercice 4. **1.** Soit A, B et C trois points distincts du plan complexe. Montrer que le triangle (ABC) est rectangle en A si, et seulement si, $\mathrm{Re}(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}) = 0$.

Les points A, B et C étant distincts, $\arg(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A})$ est l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Le triangle (ABC) est rectangle en A si, et seulement si, cet angle est droit, c'est-à-dire si, et seulement si,

$$\arg(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}) = \pm\frac{\pi}{2} \text{ modulo } 2\pi = \frac{\pi}{2} \text{ modulo } \pi.$$

Un nombre complexe a pour argument $\pm\frac{\pi}{2}$ si, et seulement si, c'est un imaginaire pur ou encore si sa partie réelle est nulle.
Le triangle (ABC) est rectangle en A si, et seulement si, $\mathrm{Re}(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}) = 0$.

2. Montrer que les points dont les affixes sont les racines de $z^3-5z^2+11z-15=0$ forment un triangle rectangle.

Les racines sont $z_0 = 3$, $z_1 = 1+2i$ et $z_2 = 1-2i$, enfin $\frac{z_1-z_0}{z_2-z_0} = -i$.