Durée : 1h30. Calculatrices, documents et téléphones interdits.
Barème : exercice 1 : 12 points, exercice 2 : 8 points.

On trouvera dans les encadrés des solutions détaillées aux questions du partiel. Leur seul défaut est de ne pas contenir, pour des raisons techniques, de figures.

Exercice 1. Dans le plan affine euclidien muni du repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $3x+4y-7=0$ et le point A de coordonnées $(4,5)$.

1. Faire une figure.

2. Donner un vecteur directeur u et un vecteur normal n de $\mathcal{D}$.

$u(-4,3)$ et $n(3,4)$.

3. soit $H(x,y)$ un point du plan. À quelle condition sur x et y les droites (AH) et $\mathcal{D}$ sont-elles perpendiculaires ?

Le vecteur $\overrightarrow{AH}$ a pour coordonnées $(x-4,y-5)$; il est orhtogonal à u si, et seulement si, le produit scalaire $u.\overrightarrow{AH} = -4(x-4)+3(y-5) = -4x+3y+1 = 0$.

4. Donner les coordonnées de B projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$.

Les coordonnées de B vérifient l'équation de $\mathcal{D}$ et la condition trouvée à la question précédente. Elles sont donc solution du système

$$\left\{\begin{array}{rcl} -4x+3y+1 & = & 0 \\ 3x+4y-7 & = & 0 \end{array}\right. .$$

Ce système admet une unique solution $x=1$ et $y=1$. Les coordonnées de B sont donc $(1,1)$.

5. Soit $M(x,y)$ un point du plan, calculer les distances AM et $d(M,\mathcal{D})$ en fonction de x et y.

Nous savons que $AM = \|\overrightarrow{AM}\| = \sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2}$. Nous connaissons aussi la formule $d(A,\mathcal{D}) = \frac{|3x+4y-7|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{1}{5}|3x+4y-7|$.

6. Donner une équation de l'ensemble $\mathcal{P}$ des points équidistants de A et $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{P} = \{M \mid AM = d(\mathcal{D},M)\}.$$

$\mathcal{P}$ a donc pour équation (en élevant au carré les deux quantités trouvées précédemment)

$$(3x+4y-7)^2 = 25((x-4)^2+(y-5)^2) \iff 16x^2+9y^2-24xy-158x-194y+976=0.$$

On considère le point $\Omega(1,1)$ et les vecteurs $e(\frac{-4}{5},\frac{3}{5})$ et $f(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$.

7. Montrer que (Ω,e,f) est un repère orthonormé.

On vérifie facilement que $\|e\| = \|f\| = 1$ et que $e.f = 0$.

8. Donner une équation de $\mathcal{D}$ et les coordonnées de A dans le repère (Ω,e,f).

$\mathcal{D}$ est l'axe des abscisses du nouveau repère donc d'équation $X=0$ et A a pour coordonnées $(5,0)$ (il est sur l'axe des ordonnées).

9. En déduire une équation de $\mathcal{P}$, l'ensemble des points équidistants de A et $\mathcal{D}$, dans le repère (Ω,e,f).

Pour un point M de coordonnées (X,Y) dans le repère (Ω,e,f), la distance AM est $AM = \sqrt{X^2+(Y-5)^2}$ et la distance $d(M,\mathcal{D})$ est $d(M,\mathcal{D}) = |Y|$. L'équation de $\mathcal{P}$ est donc $X^2 + (Y-5)^2 = Y^2 \iff 10Y = X^2+25$.
Autre méthode. Soit M de coordonnées (x,y) dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et de coordonnées (X,Y) dans le repère (Ω,e,f). Alors on a les relations

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{-4}{5}X + \frac{3}{5}Y + 1 \\ \\ y & = & \frac{3}{5}X + \frac{4}{5}Y + 1 \end{array}\right. .$$

En remplaçant dans l'équation trouvée à la question précédente on obtient l'équation de $\mathcal{P}$ dans le repère (Ω,e,f) :

$$10Y = X^2 + 25.$$

Exercice 2. Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on considère la droite

$$\mathcal{D}_t \ : \left\{\begin{array}{l} x - z = t \\ \\ tx - 2y + tz + 1 = 0 \end{array}\right.$$

1. Donner un vecteur directeur de $\mathcal{D}_t$.

$n_1(1,0,-1)$ et $n_2(t,-2,t)$ sont des vecteurs normaux à $\mathcal{D}_t$, un vecteur directeur de $\mathcal{D}_t$ est donc $u_t = -n_1 \wedge n_2$:$u(2,2t,2)$.

2. Montrer que pour tous $t \neq t'$, les droites $\mathcal{D}_t$ et $\mathcal{D}_{t'}$ ne sont pas coplanaires.

Deux droites sont coplanaires si, et seulement si, elles sont sécantes ou parallèles.
Un point $M(x,y,z)$ appartient à l'intersection de $\mathcal{D}_t$ et $\mathcal{D}_{t'}$ si, et seulement si, ses coordonnées vérifient simultanément les équations de $\mathcal{D}_t$ et $\mathcal{D}_{t'}$ et donc en particulier $x - z = t = t'$ ce qui est impossible si $t \neq t'$.
Le produit vectoriel des vecteurs directeurs u_t et $u_{t'}$ des droites $\mathcal{D}_t$ et $\mathcal{D}_{t'}$ calculés à la question précédente est

$$u_t \wedge u_{t'} = \begin{pmatrix} 4(t-t') \\ 0 \\ 4(t'-t) \end{pmatrix}.$$

Ce produit vectoriel n'est pas nul si $t \neq t'$, les vecteurs u_t et $u_{t'}$ ne sont donc pas colinéaires et les droites $\mathcal{D}_t$ et $\mathcal{D}_{t'}$ ne sont pas parallèles.
Nous avons ainsi montré que si $t \neq t'$ les droites $\mathcal{D}_t$ et $\mathcal{D}_{t'}$ ne sont pas coplanaires.

3. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour tout point M de $\mathcal{D}_t$ de coordonnées (x,y,z) on a $x^2 - z^2 = 2y - 1$.

En remplaçant t dans la deuxième équation de $\mathcal{D}_t$ par $x-z$ on obtient en effet $x^2-z^2 = 2y-1$.

4. Réciproquement, montrer que pour tout point $M(x,y,z)$ qui vérifie $x^2 - z^2 = 2y - 1$, il existe t (que l'on calculera) tel que M appartient à $\mathcal{D}_t$.

En posant $t = x - z$ on obtient bien que les coordonnées du point M vérifient l'équation de $\mathcal{D}_t$.