Durée : 1h30. Calculatrices, documents et téléphones interdits.
Barème : exercice 1 : 12 points, exercice 2 : 8 points.

Exercice 1. Dans le plan affine euclidien muni du repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on cinsidère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $3x + 4y - 7 = 0$ et le point A de coordonnées $(4, 5)$.

1. Faire une figure.

2. Donner un vecteur directeur u et un vecteur normal n de $\mathcal{D}$.

3. soit $H(x, y)$ un point du plan. À quelle condition sur x et y les droites (AH) et $\mathcal{D}$ sont-elles perpendiculaires ?

4. Donner les coordonnées de B projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$.

5. Soit $M(x, y)$ un point du plan, calculer les distances AM et $d(M, \mathcal{D})$ en fonction de x et y.

6. Donner une équation de l'ensemble $\mathcal{P}$ des points équidistants de A et $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{P} = \{M \mid AM = d(\mathcal{D}, M)\}.$$

On considère le point $\Omega(1, 1)$ et les vecteurs $e(\frac{-4}{5}, \frac{3}{5})$ et $f(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$.

7. Montrer que (Ω, e, f) est un repère orthonormé.

8. Donner une équation de $\mathcal{D}$ et les coordonnées de A dans le repère (Ω, e, f).

9. En déduire une équation de $\mathcal{P}$, l'ensemble des points équidistants de A et $\mathcal{D}$, dans le repère (Ω, e, f).

Exercice 2. Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on considère la droite

$$\mathcal{D}_t \ : \begin{cases} x - z = t \\ \\ tx - 2y + tz + 1 = 0 \end{cases}$$

1. Donner un vecteur directeur de $\mathcal{D}_t$.

2. Montrer que pour tous $t \neq t'$, les droites $\mathcal{D}_t$ et $\mathcal{D}_{t'}$ ne sont pas coplanaires.

3. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour tout point M de $\mathcal{D}_t$ de coordonnées (x, y, z) on a $x^2 - z^2 = 2y - 1$.

4. Réciproquement, montrer que pour tout point $M(x, y, z)$ qui vérifie $x^2 - z^2 = 2y - 1$, il existe t (que l'on calculera) tel que M appartient à $\mathcal{D}_t$.