Aix-Marseille III - Licence 1ère année - M2 - TD 1

Exemples de rédaction

Exercice 2

3. Notons H le projeté orthogonal de A sur D_3. D'après l'équation paramétrique de D_3, le vecteur $\vec{n} := (2{,}3)$ est un vecteur directeur de D_3. Par conséquent, le point H est caractérisé par les deux propriétés suivantes :

$$H \in D_3 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AH} \perp \vec{n} = 0.$$

Autrement dit H est l'unique point de la forme $(4t + 4{,}6t + 3)$ tel que le produit scalaire

$$\begin{pmatrix} 4t+1 \\ 6t-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 26t - 4$$

soit nul. On touve ainsi la valeur du paramètre $t = 2/13$, d'où $H = (60/13{,}51/13)$.

4. D'après son équation cartésienne, la droite D_1 a également $\vec{n}$ pour vecteur directeur, donc D_1 et D_3 sont parallèles. Par construction, le point H appartient à D_3 et on voit que le point A appartient à D_1 car $3 \cdot 3 - 2 \cdot 5 + 1 = 0$. Par conséquent, on a

$$d(D_1{,}D_3) = AH = \sqrt{\left(\frac{60}{13} - 3\right)^2 + \left(\frac{51}{13} - 5\right)^2} = \frac{\sqrt{21^2 + 14^2}}{13} = \frac{\sqrt{637}}{13} = \frac{7}{\sqrt{13}}.$$

5. Notons Δ_1 (respectivement Δ_2) la parallèle (resp. perpendiculaire) à D_2 passant par B. D'après l'équation cartésienne de D_2, l'équation cartésienne générale d'une droite parallèle à D_2 est $4x - y + c = 0$ et l'équation cartésienne générale d'une droite perpendiculaire à D_2 est $x + 4y + d = 0$. Les conditions $B \in \Delta_1$ et $B \in \Delta_2$ permettent alors de déterminer la valeur des constantes c et d :

$$\Delta_1 : 4x - y + 4 = 0 \quad \text{et} \quad \Delta_2 : x + 4y + 1 = 0.$$

Exercice 5

1. La famille $(e{,}f)$ est une base du plan vectoriel si et seulement si les vecteurs e et f sont linéairement indépendants, ce qui équivaut à la non nullité du déterminant

$$\delta(m) := \begin{vmatrix} m & 1 \\ 6 & m+1 \end{vmatrix} = m^2 + m - 6.$$

Ce polynôme du second degré se factorisant comme suit : $\delta(m) = (m - 2)(m + 3)$, on en déduit que $(e{,}f)$ est une base vectorielle si et seulement si $m \in \mathbb{R} \setminus \{-3{,}2\}$.

2. On cherche X et Y tels que $u = Xe + Yf$. Par identification des coordonnées dans la base usuelle, cela revient à déterminer X et Y tels que

$$\begin{cases} X + mY = x \\ (m+1)X + 6Y = y \end{cases}$$

En remplaçant la ligne L_1 par $6L_1 - mL_2$ et L_2 par $L_2 - (m+1)L_1$, on obtient le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} -\delta(m)X = 6x - my \\ -\delta(m)Y = -(m+1)x + y \end{cases}$$

Ainsi pour tout $m \in \mathbb{R} \setminus \{-3,2\}$, on a les formules de changement de base

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X & = & \frac{-6x+my}{m^2+m-6} \\ Y & = & \frac{(m+1)x-y}{m^2+m-6} \end{array} \right.$$

Exercice 9

1. La condition $MA = kMB$ est clairement équivalente à $MA^2 = k^2MB^2$. Par ailleurs, on $MA^2 = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA}$ et $MB^2 = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MB}$, de sorte que

$$MA = kMB \quad \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}) = 0.$$

Comme $1 + k \neq 0$, on peut introduire le barycentre G_1 du système $\{(A,1),(B,k)\}$, lequel satisfait l'équation vectorielle $\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} = (1+k)\overrightarrow{MG_1}$.

- Si $k = 1$, alors G_1 n'est autre que le milieu du segment $[A,B]$ et la condition devient

$$\overrightarrow{MG_1} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

  L'ensemble cherché est donc la droite perpendiculaire au segment $[A,B]$ passant par son milieu (on retrouve ainsi que la médiatrice est l'ensemble des points équidistants...).
- Si $k \neq 1$, on a aussi $1-k \neq 0$ et on peut introduire le barycentre G_2 du système $\{(A,1),(B,-k)\}$ caractérisé par $\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} = (1-k)\overrightarrow{MG_1}$. La condition devient donc dans ce cas

$$\overrightarrow{MG_1} \cdot \overrightarrow{MG_2} = 0.$$

  Autrement dit, l'ensemble cherché est celui des points M tels que l'angle $\widehat{G_1MG_2}$ soit droit. Il s'agit donc du cercle de diamètre $[G_1,G_2]$

2. D'après la question précédente, l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M du plan tels que $\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}$ est un cercle dont le centre appartient à la droite (BC) (nous avons besoin pour cela de l'hypothèse $\frac{AB}{AC} \neq 1$, omise dans l'énoncé, mais qui est indispensable sinon (ABC) est isocèle et l'une des bisssectrices est parallèle à (BC)). Si nous montrons que $\frac{IB}{IC} = \frac{JB}{JC} = \frac{AB}{AC}$ alors I et J appartiennent à $\mathcal{C}$ et comme le centre du cercle appartient à (BC) et donc à (IJ), nous en déduisons que $\mathcal{C}$ est le cercle de diamètre $[IJ]$.

Montrons que $\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC}$. Soit D l'intersection de la parallèle à (IA) passant par C avec la droite (AB). D'après le théorème de THALÈS nous avons donc : $\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AD}$. Les angles $\widehat{IAC}$ et $\widehat{ACD}$ sont égaux, car les droites (AC) et (CD) sont parallèles. De même, les angles $\widehat{BAI}$ et $\widehat{ADC}$ sont égaux. Enfin puisque (AI) est une bissectrice des droites (AB) et (AC), les angles $\widehat{BAI}$ et $\widehat{IAC}$ sont égaux. Ainsi les angles $\widehat{ACD}$ et $\widehat{ADC}$ sont égaux, le triangle (ACD) est isocèle de sommet principal A, $AD = AC$ et enfin $\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC}$.

On montrerait de même que $\frac{JB}{JC} = \frac{AB}{AC}$. Ce qui termine l'exercice.