Licence de Mathématiques-Informatique	Année 2004-2005

Géométrie affine
Feuille 2

Applications affines. Groupe affine.

On désigne par $\mathcal{E}$ un espace affine dirigé par un **R**-espace vectoriel de dimension finie E.

1) i) Dans le cas où $\mathcal{E} = \mathbf{R}$, préciser l'ensemble des applications affines de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$, puis l'ensemble des applications affines bijectives de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$.

ii) Dans le cas où $\mathcal{E} = \mathbf{R}^2$, donner l'expression analytique générale d'une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$, puis d'une application affine bijective de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$.

iii) Dans le cas où $\mathcal{E} = \mathbf{R}^2$, pour quelles valeurs du nombre réel a l'application f qui à $M = (x, y)$ associe $M' = (y+ax^2, x+a^2y)$ est-elle affine ?

2) On suppose que $\mathcal{E}$ est un plan affine.

Soient f une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ et P, Q et R trois points de $\mathcal{E}$.
i) On suppose que P, Q et R sont alignés; que peut-on dire de f(P), f(Q) et f(R)?
ii) On suppose que P, Q et R sont non alignés et que f(P), f(Q) et f(R) sont non alignés; que peut-on dire de f ?

3) Dans le cas où $\mathcal{E} = \mathbf{R}^2$, ayant fixé deux points distincts A et B, on considère l'application f qui à tout point M n'appartenant pas à la droite (AB) associe l'orthocentre (intersection des hauteurs) du triangle ABM. L'application f est-elle la restriction à $\mathcal{E} \setminus (AB)$ d'une application affine ?

4) Soit f un élément de $GA(\mathcal{E})$ tel que $\vec{f} = \lambda\, Id_E$, où $\lambda \neq 1$. Montrer qu'il existe un unique point A tel que f est l'homothétie de centre A et de rapport λ.

5) Soit f une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ telle qu'il existe un nombre entier $p \geq 1$ pour lequel $f^p = Id_{\mathcal{E}}$. Montrer que f admet toujours un point fixe et étudier dans quel cas il est unique.

6) Soit G un sous-groupe fini du groupe $GA(\mathcal{E})$. Montrer qu'il existe un point O fixé par tous les éléments de G. Retrouver grâce à ceci l'exercice précédent.

7) Soit f une application affine de $\mathcal{E}$ dans **R**. Montrer que f est constante ou surjective, et que si f est non constante, pour tout nombre réel α, l'ensemble $f^{-1}(\alpha)$ est un hyperplan de $\mathcal{E}$.

★ 8) Soit f une application de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ conservant les milieux.
i) Montrer que si f est continue, alors f est affine.
ii) Montrer que s'il existe une boule ouverte sur laquelle f est bornée, alors f est affine.

(★ : exercice difficile)