Licence de Mathématiques-Informatique	Année 2004-2005

Géométrie affine
Feuille 4

Repères cartésiens, repères affines. Convexité.

1) Applications affines et repères cartésiens.

Déterminer la nature des applications suivantes de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$:

- $(x, y, z) \longmapsto (- 5/2\, x - 3/2\, y + z - 3/2,\ 3/2\, x+1/2\, y - z - 1/2,\ - 3\, x - 3\, y + z - 3)$,
- $(x, y, z) \longmapsto (-x - 2\, y + 2z - 6,\ -x + z - 3,\ - 2x - 2\, y + 3z - 6)$,
- $(x, y, z) \longmapsto (3/2\, x + 1/2\, y + 1/2\, z - 1/2,\ x + 2y + z-1,\ - 1/2x - 1/2\, y + 1/2z + 1/2)$,
- $(x, y, z) \longmapsto (- 4x + 9,\ - 4y - 1,\ - 4z + 3)$,
- $(x, y, z) \longmapsto (x + 3,\ y - 2,\ 2z + 4)$.

2) Barycentres et convexité.

i) On considère les points $O=(0, 0, 0)$, $A=(1, 0, 0)$, $B=(0, 1, 0)$ et $C=(0, 0, 1)$ de $\mathbf{R}^3$.
Calculer le barycentre de (O, m), (A, a), (B, b) et (C, c) , avec $m+a+b+c \neq 0$.
Calculer les coordonnées barycentriques d'un point $M=(x, y, z)$ dans le repère affine (O, A, B, C).

ii) Soit (A, B, C) un repère affine d'un plan affine $\mathcal{P}$ d'un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension ≥ 3 .
Soient M, N et P trois points de $\mathcal{P}$ de coordonnées barycentriques (a_1, b_1, c_1) , (a_2, b_2, c_2) et (a_3, b_3, c_3) dans le repère (A, B, C).
Quelles sont les coordonnées barycentriques de $\lambda M+(1-\lambda)N$?
Montrer que M, N et P sont alignés si et seulement si $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$.

iii) Déterminer l'enveloppe convexe des parties suivantes de $\mathbf{R}^2$:
- $\{ (x, y) \quad \mathbf{R}^2 ;\ x^2+y^2 = 1\}$,
- $\{ (t, 0) ;\ t \quad \mathbf{R} \text{ et } t \geq 0\} \cup \{ (0, t) ;\ t \quad \mathbf{R} \text{ et } t \geq 0\}$,
- $\{ (0, 0) \} \cup \{ (1, t) ;\ t \quad \mathbf{R} \}$,
- $\{ (x, y) \quad \mathbf{R}^2 ;\ y = x^2\}$,
- $\{ (x, y) \quad \mathbf{R}^2 ;\ y = \sin x\}$,
- $\{ (x, y) \quad \mathbf{R}^2 ;\ y = x^3\}$.

iv) Dans tout ce qui suit $\mathcal{E}$ désigne un espace affine de dimension n.

① Dans cette question, on suppose que n=2. Soient A, B et C trois points affinement indépendants de $\mathcal{E}$, d'où le triangle ABC (cad toute la portion de plan limitée par les côtés de ABC, côtés compris), et f une application affine de $\mathcal{E}$ dans lui-même. Etudier si l'image par f de l'intérieur du triangle ABC est l'intérieur du triangle f(A)f(B)f(C) .

②Soit X une partie de $\mathcal{E}$.

- On suppose que X est finie. Montrer que son enveloppe convexe est compacte en faisant intervenir une application continue bien choisie.

- On suppose que X n'est contenue dans aucun hyperplan affine de $\mathcal{E}$.

Montrer que X contient (n+1) points affinement indépendants. En déduire que l'enveloppe convexe de X est d'intérieur non vide.

v) Soit $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ un repère affine d'un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension n.

On considère n+1 points $P_0, P_1, \dots, P_n$ de $\mathcal{E}$ définis par :

$P_i = a^0_i A_0 + \dots + a^n_i A_n$, pour $i = 0, \dots, n$.

Montrer que le sous-espace affine de $\mathcal{E}$ engendré par $\{ P_0, P_1, \dots, P_n \}$ est de dimension r-1, où r est le rang de la matrice $(a^j_i)_{0 \le i,j \le n}$.