

Algèbre et Géométrie - TD n° 1

**Ex. 1.** Soit  $K$  un corps commutatif.

1. Reprendre la définition connue de la fonction

$$\det : M_n(K) \rightarrow K .$$

Montrer que, via l'identification naturelle  $M_n(K) = [K^n]^n$  (laquelle?),  $\det$  est une forme  $n$ -linéaire alternée.

2. Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie. En utilisant la correspondance connue entre endomorphismes et matrices carrées, introduire une fonction  $\det$  sur  $\text{End}(E)$  et vérifier que cette fonction est bien définie.
3. Donner les définitions de
  - (a) valeur propre, vecteur propre d'un endomorphisme (d'une matrice), espace propre associé à une valeur propre, multiplicité algébrique, multiplicité géométrique.
  - (b) polynôme caractéristique d'une matrice et d'un endomorphisme.
4. Préciser le coefficient de  $X^{n-1}$  et le terme de degré 0 du polynôme caractéristique  $P_A(X)$  d'une matrice  $A \in M_n(K)$ .

**Ex. 2.** Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 & 0 \\ -12 & -7 & 0 & 0 \\ 20 & 11 & -6 & -12 \\ -12 & -6 & 6 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 13 & -5 & -2 \\ -2 & 7 & -8 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Dans chaque cas préciser si la matrice est diagonalisable ou trigonalisable sur  $\mathbb{R}$  et donner, le cas échéant, explicitement une matrice semblable diagonale (respectivement triangulaire).

**Ex. 3.** Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  et  $\lambda$  une valeur propre *complexe* de  $A$ . Montrer que  $\bar{\lambda}$  est aussi une valeur propre de  $A$  et que, si l'on désigne par  $E_\lambda \subset \mathbb{C}^n$  l'espace propre de  $A$  considérée comme matrice complexe, alors on a  $E_{\bar{\lambda}} = \bar{E}_\lambda$ .

Application: diagonaliser sur  $\mathbb{C}$  la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Ex. 4.** La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

définit, dans la base canonique de  $\mathbb{R}^4$ , un endomorphisme que l'on notera  $u$ .

1. Déterminer une base dans laquelle la matrice de  $u$  est triangulaire supérieure (préciser, bien sûr, cette matrice).
2. Déterminer enfin une base dans laquelle la matrice de  $u$  devient

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Ex. 5.** Calculer le polynôme minimal des matrices suivantes et préciser si elles sont diagonalisables ou non:

1. les 4 matrices de l'exercice 2;

2. la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ) (discuter selon les valeurs de  $a, b$  et  $c$ ).

**Ex. 6.** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Montrer que  $A$  est diagonalisable et inversible. En déduire le polynôme minimal  $m_A(X)$  et, en utilisant celui-ci, déterminer  $A^{-1}$ .

**Ex. 7.** Classifier, à similitude près, toutes les matrices nilpotentes d'ordre 5. Dans chaque cas, préciser le polynôme minimal.

**Ex. 8.** En discutant selon les valeurs de  $\alpha \in \mathbb{R}$ , déterminer les sous-espaces caractéristiques et donner une forme réduite de Jordan (en précisant une matrice de passage) de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & & 1 & 0 & 0 \\ 1 & & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -(4 + \alpha) & -4 & -1 & \end{pmatrix}$$

**Ex. 9.** Soit  $A \in M_6(\mathbb{C})$  telle que

$$P_A(X) = (X - 1)^4(X - 2)^2, \quad m_A(X) = (X - 1)^2(X - 2).$$

Que peut-on dire des dimensions des espaces propres? Quelles sont les formes de Jordan possibles?