UNIVERSITÉ DE PROVENCE LICENCE DE MATHÉMATIQUES - M41
2004-2005

Algèbre et Géométrie - Examen du 24 juin 2005

Ex. 1. (Questions proches du cours)

1. Démontrer qu'un endomorphisme f d'un espace vectoriel de dimension finie V sur un corps commutatif K est diagonalisable si, et seulement si, son polynôme minimal est scindé sur K et n'a que des racines simples.
2. (a) Démontrer que $A \in O(2)$ si, et seulement si, il existe $\alpha \in [0, 2\pi)$ tel que
$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \text{ ou } A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$
   (b) Dans chaque cas, déterminer $\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(A)$, $\mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(A)$ et préciser si A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
   (c) Démontrer que $SO(2)$ est isomorphe au groupe multiplicatif
$$S^1 := \{z \in \mathbb{C} |\ |z| = 1\} \subset \mathbb{C}^*.$$
   (d) Démontrer que l'endomorphisme φ_A associé à une matrice $A \in O(2) \setminus SO(2)$ est la symétrie (réflexion) par rapport à une droite vectorielle $d \subset \mathbb{R}^2$.

3. Soit h une forme sesquilinéaire sur un espace vectoriel complexe E. Montrer que pour tous x, $y \in E$ on a
$$h(x, y) = \frac{1}{4}[h(x + y, x + y) - h(x - y, x - y) - ih(x + iy, x + iy) + ih(x - iy, x - iy)]\ .$$

Ex. 2. Considérons la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -(4+\lambda) & -4 & -1 \end{pmatrix} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}\ .$$
En discutant selon les valeurs de λ, déterminer

1. le polynôme caractéristique de A,
2. les valeurs propres de A,
3. leur multiplicités algébriques,
4. leur multiplicités géométriques,
5. les espaces propres de A,
6. le polynôme minimal de A,
7. ainsi qu'une forme réduite de Jordan J de A.

Ex. 3. Soit (E, h) un espace hermitien. Désignons par $\mathrm{Herm}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes hermitiens (auto-adjoints) de E et par $\mathrm{Herm}_+(E) \subset \mathrm{Herm}(E)$ le sous-ensemble des endomorphismes hermitiens à valeurs propres strictement positives.

1. Démontrer que l'application $\exp : \mathrm{Herm}(E) \to \mathrm{Herm}_+(E)$ est bijective.
2. Démontrer que $\exp(i\mathrm{Herm}(E)) \subset U(E)$, où $U(E)$ désigne le groupe des automorphismes unitaires de l'espace hermitien E.
3. Est-ce que l'application $\exp : i\mathrm{Herm}(E) \to U(E)$ est surjective ?
4. Est-ce que l'application $\exp : i\mathrm{Herm}(E) \to U(E)$ est injective ?

   Indication : Utiliser les théorèmes de diagonalisation.