UNIVERSITÉ DE PROVENCE LICENCE DE MATHÉMATIQUES - M41
2004-2005

Algèbre et Géométrie - Examen du 16 mai 2005

Ex. 1. (Questions de cours)

1. Énoncer et démontrer le théorème concernant la diagonalisabilité des endomorphismes normaux.
2. Donner la forme canonique d'un endomorphisme orthogonal.
3. Montrer que $O(n)$ est compact.
4. Montrer que $SO(n)$ est connexe.

Ex. 2.
Dans cet exercice, tous les calculs s'effectuent sur $\mathbb{C}$.

Soit $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & c \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_3(\mathbb{C})$.

1. Déterminer $P_A(X)$ et $\mathrm{Spec}(A)$.
2. Sous quelles conditions le polynôme caractéristique $P_A(X)$ admet-il une racine triple ? Quelle est dans ce cas la forme normale de la matrice ?
3. Sous quelles conditions le polynôme caractéristique $P_A(X)$ admet-il une racine double distincte de la troisième ?
4. Sous quelles conditions la matrice A^2 est-elle proportionnelle à A ?
5. Sous quelles conditions le polynôme minimal $m_A(X)$ est-il de degré un ?
6. Sous quelles conditions le polynôme minimal $m_A(X)$ est-il de degré deux ?
7. Sous quelles conditions la matrice est-elle diagonalisable ?
8. Quelle est la forme normale de la matrice lorsque son polynôme caractéristique $P_A(X)$ admet une racine double ou triple ?
9. Démontrer que lorsque a, b et c sont réels, les racines de $P_A(X)$ sont distinctes, sauf si $a = b = 0$.
10. Donner l'exemple d'une matrice complexe symétrique non diagonalisable.
    Quelle est la bonne généralisation du théorème
    "*Toute matrice réelle symétrique est diagonalisable.*" ?
11. Déterminer les espaces propres et caractéristiques de l'endomorphisme correspondant à la matrice $B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2\imath \end{pmatrix}$.

Ex. 3
Soit $A \in \mathfrak{sl}_2(K)$ une matrice 2×2 de trace nulle.

1. A l'aide du théorème de Cayley-Hamilton, démontrer que A^2 est une matrice scalaire.
2. En déduire que A est nilpotente ssi $\det(A) = 0$.