UNIVERSITÉ DE PROVENCE LICENCE DE MATHÉMATIQUES - M41 2004-2005

Algèbre et Géométrie - Examen du 16 mai 2005
Corrigés des ex. 2 et 3

Ex. 2.

(Cet exercice s'est inspiré d'un exercice p. 205 du livre
Algèbre linéaire (2e édition), *de* Joseph GRIFONE, Cépaduès-Editions, Toulouse, 2002.*)*

Tous les calculs s'effectuent sur $\mathbb{C}$.

Soit

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & c \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_3(\mathbb{C}).$$

On notera J sa forme normale.

1. $$P_A(X) = \begin{vmatrix} -X & 0 & a \\ 0 & -X & b \\ a & b & c-X \end{vmatrix} = -X(X^2 - cX - a^2 - b^2).$$

Dans la suite, on posera

$f(X) := X^2 - cX - a^2 - b^2$ ainsi que

$\delta :=$ une racine carrée de $\delta^2 := 4a^2 + 4b^2 + c^2$, le discriminant de $f(X)$.

On a alors $\mathrm{Spec}(A) = \{0, \frac{c+\delta}{2}, \frac{c-\delta}{2}\}$.

Notons que la somme des valeurs propres (en tenant compte des multiplicités) est toujours égale à $c = \mathrm{tr}(A)$, ce qui peut servir de contrôle des résultats obtenus.

Dans la suite, on sera amené à considérer, dans l'espace des paramètres

$$\mathcal{P} := \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wr\ a, b \text{ et } c \in \mathbb{C} \right\}$$

la stratification déterminée par:

- la surface singulière $\mathcal{S}$ définie par l'équation $a^2 + b^2 = 0$,
- la surface singulière $\mathcal{T}$ définie par l'équation $4a^2 + 4b^2 + c^2 = 0$,
- la courbe singulière $\sigma := \mathcal{S} \cap \mathcal{T}$,
- la droite $d \subset \mathcal{S}$ définie par le système $a = b = 0$ et
- le point $O = \sigma \cap d = \mathcal{T} \cap d$ défini par $a = b = c = 0$.

Les résultats que l'on obtiendra peuvent se résumer dans le tableau suivant:

cas	lieu	défini par	Spec(A)	J	$m_A(X)$
I	$\mathcal{P}\setminus(\mathcal{S}\cup\mathcal{T})$	$(a^2+b^2)(4a^2+4b^2+c^2)\neq 0$	$\{0,\frac{c+\delta}{2},\frac{c-\delta}{2}\}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c+\delta}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c-\delta}{2} \end{pmatrix}$	$-P_A(X)$
II	$\mathcal{S}\setminus(\sigma\cup d)$	$a^2+b^2=0\neq c$ et $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\{0,0,c\}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$	$-P_A(X)$
III	$\sigma\setminus O$	$a^2+b^2=c=0$ et $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\{0,0,0\}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$-P_A(X)$
IV	$d\setminus O$	$a=b=0\neq c$	$\{0,0,c\}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$	$X(X-c)$
V	O	$a=b=c=0$	$\{0,0,0\}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	X
VI	$\mathcal{T}\setminus\sigma$	$4a^2+4b^2+c^2=0\neq c$	$\{0,\frac{c}{2},\frac{c}{2}\}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{c}{2} \end{pmatrix}$	$-P_A(X)$

2. Le polynôme caractéristique $P_A(X)$ admet une racine triple ssi $c = a^2+b^2 = 0$, ou encore ssi

   $a^2+b^2 = 4a^2+4b^2+c^2 = 0;$

   en particulier, cette racine triple est nécessairement $= 0$.

   Si, de plus, $a = b = 0$, on a $J = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ `(cas V)`.

   Sinon A est nilpotente de rang 2 (donc d'indice de nilpotence 3 et) $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ `(cas III)`.

3. $\mathrm{mult}_a(0) \geq 2$ ssi 0 est une racine du polynôme $f(X)$ $^{(\rightsquigarrow 1)}$, c. à d. ssi $a^2+b^2 = 0$, auquel cas

   $\mathrm{Spec}(A) = \{0,0,c\}$ `(cas II à V)`.

   Le polynôme $f(X)$ admet une racine double ssi $\delta^2 = 4a^2+4b^2+c^2 = 0$, auquel cas

   $\mathrm{Spec}(A) = \{0,\frac{c}{2},\frac{c}{2}\}$ `(cas V et VI)`.

   Donc $P_A(X)$ admet une racine double distincte de la troisième ssi

   $(a^2+b^2)(4a^2+4b^2+c^2) = 0 \neq c$ `(cas II, IV et VI)`.

4. Comme $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & ab & * \\ ab & b^2 & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$, si A^2 est proportionnelle à A, alors $\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, c. à d.

   $a = b = 0;$

Inversement, si $a = b = 0$, alors $A^2 = cA$.

En particulier, le facteur de proportionnalité est toujours $= c$ (cas IV et V).

5. Le polynôme minimal $m_A(X)$ est de degré 1 ssi A est scalaire, c. à d. ssi

   $a = b = c = 0$ (cas V).

6. $m_A(X)$ est de degré ≤ 2 ssi A^2 est proportionnelle à A, c. à d. ssi $a = b = 0^{(\rightsquigarrow 4)}$. Donc $m_A(X)$ est de degré 2 ssi

   $a = b = 0 \neq c$, auquel cas

   $m_A(X) = X(X - c) = X^2 - cX$ (cas IV).

7. On a toujours $\deg(m_A(X)) \geq \#\mathrm{Spec}(A)$. A est alors diagonalisable ssi $\deg(m_A(X)) = \#\mathrm{Spec}(A)$. Donc:

   - si $\#\mathrm{Spec}(A) = 3$, A est diagonalisable (cas I);
   - si $\#\mathrm{Spec}(A) = 2$, A est diagonalisable ssi $m_A(X)$ est de degré 2, c. à d. ssi $a = b = 0 \neq c$ $^{(\rightsquigarrow 6)}$ (cas IV) et
   - si $\#\mathrm{Spec}(A) = 1$, A est diagonalisable ssi $m_A(X)$ est de degré 1, c. à d. ssi $a = b = c = 0$ $^{(\rightsquigarrow 5)}$ (cas V).

8. Lorsque $\#\mathrm{Spec}(A) = 2$, deux cas se présentent $^{(\rightsquigarrow 3)}$:

   - $a^2 + b^2 = 0 \neq c$, donc $\mathrm{Spec}(A) = \{0, 0, c\}$; on distinguera deux sous-cas:
     - $a = b = 0 \neq c$: $J = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ (cas IV) et
     - $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: A n'est pas diagonalisable $^{(\rightsquigarrow 7)}$, donc $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ (cas II).
   - $4a^2 + 4b^2 + c^2 = 0 \neq c$, donc $\mathrm{Spec}(A) = \{0, \frac{c}{2}, \frac{c}{2}\}$ et $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:

     A n'est pas diagonalisable $^{(\rightsquigarrow 7)}$, donc $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{c}{2} \end{pmatrix}$ (cas VI).

   Pour le cas $\#\mathrm{Spec}(A) = 1$, cf. 2 (cas III et V).

9. Supposons que a, b et c sont réels et que A admet une valeur propre double ou triple. Comme toute matrice réelle symétrique est diagonalisable, on doit avoir $a = b = 0^{(\rightsquigarrow 7)}$ (cas I, IV et V).

   Cela découle également directement des calculs effectués en réponse aux questions 2 et 3.

10. La matrice A est symétrique. Elle n'est pas diagonalisable ssi

$$(a^2+b^2)(4a^2+4b^2+c^2)=0 \text{ et } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}^{(\rightsquigarrow 2,3,7)},$$

ce qui se produit pour certaines valeurs $\in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ des paramètres a, b et c `(cas II, III et VI)`.

Par ailleurs, on sait que toute matrice complexe *hermitienne* (ou plus généralement *normale*) est diagonalisable.

11. Soit u l'endomorphisme $E \to E$ dont la matrice dans la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ est

$$B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2\imath \end{pmatrix}.$$

On notera $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ une base Jordanisante.

Comme $\mathrm{Spec}(B) = \{0, \imath, \imath\}$, on est dans le cas VI et l'on a

$$\dim(E_0) = \dim(N_0) = \dim(E_\imath) = 1 < 2 = \dim(N_\imath).$$

Il est immédiat que $\mathbf{f}_1 := \mathbf{e}_2$ engendre $E_0 = N_0$.

Comme $(B - \imath I_2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$ est une base de $N_\imath = \ker(u - \imath\,\mathrm{id})^2$.

Pour qu'un vecteur $\mathbf{f}_3 \in N_\imath$ convienne comme troisième vecteur de la base Jordanisante, il faut et il suffit que $(u - \imath\,\mathrm{id})(\mathbf{f}_3) \neq 0$.

$\mathbf{f}_3 := \mathbf{e}_3$ convient, puisque $\begin{pmatrix} -\imath & 0 & 1 \\ 0 & -\imath & 0 \\ 1 & 0 & \imath \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \imath \end{pmatrix} := \mathbf{f}_2 \neq 0.$

Ex. 3

1. Soit $A \in \mathbb{M}_2(K)$ une matrice 2×2. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a

$$A^2 + \mathrm{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0.$$

Donc si $\mathrm{tr}(A) = 0$, $A^2 = -\det(A)I_2 = \begin{pmatrix} -\det(A) & 0 \\ 0 & -\det(A) \end{pmatrix}$ est une matrice scalaire.

2. Si $N \in \mathbb{M}_n(K)$ est nilpotente, alors $0 \in \mathrm{Spec}(N)$, donc $\det(N) = 0$.

Soit alors $A \in \mathfrak{sl}_2(K)$.

Si $\det(A) \neq 0$, on vient de voir que A ne saurait être nilpotente.

Si $\det(A) = 0$, on a, par la question précédente, $A^2 = 0$, c. à d. A est une matrice nilpotente d'indice de nilpotence ≤ 2.