On se contente ici de corriger l'exercice 3, l'exercice 1 étant du cours et l'exercice 2 ayant déjà été donné l'an passé (on consultera donc le corrigé du partiel de l'an passé disponible en ligne).

Exercice 3

1. Soit u un vecteur. Puisque la base est orthonormée nous pouvons calculer le produit scalaire et la norme par les formules usuelles. Un rapide calcul montre que $\|g(u)\| = \|u\|$, $u.g(u) = \|u\|^2 \cos\theta$ et que $\det(u, g(u)) = \|u\|^2 \sin\theta$ (le déterminant étant l'unique forme bilinéaire antisymétrique qui vaut 1 sur la base orthonormée, qui est donc déclarée directe). Ces trois relations montrent que l'angle orienté $(u, g(u))$ est de mesure θ et caractérisent la rotation d'angle θ.

2. Les valeurs propres (complexes) de g sont $e^{\pm i\theta}$. L'endomorphisme g est trigonalisable sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, elles sont réelles, c'est-à-dire, si, et seulement si, $\theta \in \mathbb{Z}\pi$. Dans ce cas la matrice R_θ est diagonale (égale à $\pm I_2$).

3. Soit f un endomorphisme de E non trigonalisable. Il n'a donc pas de valeurs propres réelles (car s'il en avait une il en aurait deux), et ses deux valeurs propres sont distinctes, complexes et conjuguées : λ et $\bar{\lambda}$. Sous forme exponentielle, il existe $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}\pi$ tels que $\lambda = \rho e^{i\theta}$.

La matrice A de f dans la base canonique de $E = \mathbb{R}^2$ est donc semblable dans $M_2(\mathbb{C})$ à la matrice

$$B = \rho \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est semblable (dans $M_2(\mathbb{C})$) à la matrice ρR_θ (en utilisant la matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}).$$

Ainsi les matrices A et ρR_θ sont semblables dans $M_2(\mathbb{C})$. De plus elles sont toutes les deux dans $M_n(\mathbb{R})$, elles sont donc semblables dans $M_2(\mathbb{R})$.

On a ainsi démontré qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est ρR_θ.

4. Soit f un endomorphisme de E trigonalisable. Il a donc deux valeurs propres (avec multiplicité) λ, μ dans $\mathbb{R}$.

Si f est diagonalisable, par définition, il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Si les deux valeurs propres sont distinctes alors f est diagonalisable.

Si f n'est pas diagonalisable, alors les valeurs propres sont égales et le théorème de Jordan affirme qu'il existe une base dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

5. Si f est un endomorphisme non trigonalisable sur $\mathbb{R}$ alors, d'après la question 3, il existe une base B de E dans laquelle la matrice de f est ρR_θ ($\rho > 0$, $\theta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}\pi$). Si de plus le déterminant de f est 1, alors $\rho = 1$. La matrice de f est bien celle d'une rotation, *mais* la base B n'est pas orthonormée en général. L'endomorphisme f est bien une rotation pour la structure euclidienne qui fait de B une base orhonormée, mais, en général, pas pour la structure euclidienne standard de $E = \mathbb{R}^2$. C'est donc une question piège.

6. Soit h un endomorphisme de E. Les valeurs propres complexes de $\exp(h)$ sont les exponentielles des valeurs propres complexes de h (ce que l'on voit en effectuant les calculs dans une base où h est triangulaire). On peut alors caractériser l'endomorphisme $\exp(h)$ en utilisant les questions 2 et 3.

1. Si les valeurs propres de h sont complexes distinctes et conjuguées (cas ρR_θ) : $\rho e^{\pm i\theta}$, alors les valeurs propres de $\exp(h)$ sont $e^{\rho\cos\theta \pm i\rho\sin\theta}$. Ces valeurs propres sont conjuguées, elles sont distinctes si, et seulement si, $\rho\sin\theta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}\pi$. Ainsi, s'il existe une base B dans laquelle la matrice de h est ρR_θ avec $\rho\sin\theta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}\pi$, alors il existe une base (en fait la même base B) dans laquelle la matrice de $\exp(h)$ est $e^{\rho\cos\theta} R_{\rho\sin\theta}$. Notons que si $\rho\sin\theta \in \mathbb{Z}\pi$, alors la matrice de $\exp(h)$ est $\pm e^{\rho\cos\theta} I_2$, c'est à dire que la formule précédente reste valable (on pourrait démontrer cette dernière remarque soit en utilisant la continuité, soit en calculant explicitement dans $M_2(\mathbb{C})$).
2. Si il existe une base B dans laquelle la matrice de h est de la forme
$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$
alors dans cette même base la matrice de $\exp(h)$ est de la forme
$$\begin{pmatrix} e^\lambda & e^\lambda \\ 0 & e^\lambda \end{pmatrix}.$$
Le théorème de Jordan affirme alors qu'il existe une base B' dans laquelle la matrice de $\exp(h)$ est de la forme
$$\begin{pmatrix} e^\lambda & 1 \\ 0 & e^\lambda \end{pmatrix}.$$
3. Si il existe une base B dans laquelle la matrice de h est diagonale de la forme
$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix},$$
alors dans cette même base la matrice de $\exp(h)$ est de la forme
$$\begin{pmatrix} e^\lambda & 0 \\ 0 & e^\mu \end{pmatrix}.$$

L'étude de ces trois cas permet alors de déterminer l'image de l'exponentielle.

Étant donné un endomorphisme f pour lequel il existe une base B dans laquelle la matrice de f est $\rho' R_{\theta'}$, (avec $\rho' > 0$), alors il existe $\rho > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ tels que $\log\rho' = \rho\cos\theta$ et $\theta' = \rho\sin\theta$ (ce sont les coordonnées polaires de $(\log\rho', \theta')$). Si h est l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base B est ρR_θ, alors $\exp(h) = f$.

Étant donné un endomorphisme f trigonalisable et non diagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe une base B dans laquelle la matrice de f est
$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

alors si $\lambda > 0$, $f = \exp(h)$ où h est un endomorphisme dont la matrice dans une base B' (différentes de B en général, mais que l'on peut déterminer)

$$\begin{pmatrix} \log\lambda & 1 \\ 0 & \log\lambda \end{pmatrix};$$

si $\lambda \leq 0$ alors f n'est pas l'exponentielle d'un endomorphisme.

Étant donné un endomorphisme f diagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe une base B dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix},$$

alors
- si $\lambda, \mu > 0$ alors $f = \exp(h)$ où h est l'endomorphisme dont la matrice dans la base B est
$$\begin{pmatrix} \log\lambda & 0 \\ 0 & \log\mu \end{pmatrix};$$
- si $\lambda = \mu < 0$ alors $f = \exp(h)$ où h est l'endomorphisme dont la matrice dans la base B est ρR_θ où $\rho\cos\theta = \log(-\lambda)$ et $\rho\sin\theta = \pi$;
- dans les autres cas f n'est pas l'exponentielle d'un endomorphisme.

Conclusion : L'image de l'exponentielle est constituée des endomorphismes non-trigonalisables, des endomorphismes ayant deux valeurs propres réelles et strictement positives et des homothéties de rapport strictement négatif.

7. Deux endomorphismes de E qui ont même déterminant et même trace ont le même polynôme caractéristique ($X^2 - X\operatorname{tr} f + \det f$) et ont donc les mêmes valeurs propres (complexes). On distingue ensuite les trois cas rencontrés aux questions 3 et 4.

1. Si l'une des valeurs propres est complexe mais pas réelle, alors elles le sont toutes les deux et elles sont conjuguées. Il existe donc une base pour chacun de f et g dans laquelle la matrice est ρR_θ, ρ et θ sont entièrement déterminés par la paire de valeurs propres et f et g sont donc semblables.
2. Si les deux valeurs propres sont réelles et distinctes alors il y a des bases dans lesquelles les matrices de f et g sont diagonales et donc f et g sont semblables.
3. Si les deux valeurs propres sont réelles et égales. Alors si l'un des endomorphismes étaient diagonalisable il y aurait une base dans laquelle sa matrice serait λI_2 et donc il serait une homothétie ce qui est exclu. Les endomorphismes f et g ne sont donc pas diagonalisables et on est dans le dernier cas de la question 4 : il existe des bases dans lesquelles les matrices de f et g sont
$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$
Les endomorphismes sont donc semblables.

Nous avons ainsi montré que deux endomorphismes qui ne sont pas des homothéties sont semblables si, et seulement si, ils ont même déterminant et même trace.

8. Le théorème de Jordan (ou le fait qu'ils ont des sous-espaces propres associés à la valeur propre 1 de dimensions différentes) affirme que les matrices de Jordan :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ne sont pas semblables. Elles ont le même polynôme caractéristique : $(1 - X)^3$.