Exercice 2

$\boxed{\text{Préambule}}$

On notera :
- u l'endomorphisme $E \to E$ dont la matrice dans la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ est A,
- $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ une base Jordanisante et
- J la matrice de u dans cette base.

Le polynôme caractéristique de A est $P_A(X) = (X-1)^2(X-b)$.

Un vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartient au sous-espace propre E_1 associé à la valeur propre 1 si, et seulement si,

$$\begin{cases} y = 0 \\ ax + (b-1)z = 0 \end{cases};$$

Ce système est de rang 1 si $a = 0$ et $b = 1$, et de rang 2 sinon.

On a $(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a(b-1) & a & (b-1)^2 \end{pmatrix}$).

Donc $\ker((u - \mathrm{id})^2) = E$ si $b = 1$ et $a = 0$; sinon c'est le plan ayant pour équation $a(b-1)x + ay + (b-1)^2 z = 0$.

On distinguera par conséquent trois cas :

$\boxed{\text{cas } b = 1 \text{ et } a = 0}$

La matrice étant déjà sous forme réduite, ce cas est trivial.

1. $P_A(X) = (X-1)^3$. E_1 est le plan ayant pour équation $y = 0$.
2. Puisqu'il y a une unique valeur propre triple 1, on a forcément $N_1 = \mathbb{R}^3$.
   $A - I_3 \neq 0$ et $(A - I_3)^2 = 0$, donc le polynôme minimal est $m_A(X) = (X-1)^2$.
3. $J = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
4. $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

$\boxed{\text{cas } b = 1 \text{ et } a \neq 0}$

1. $P_A(X) = (X-1)^3$. Pour l'espace propre, cf. infra (après la question 4).
3. $\mathrm{rg}(A - I_3) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 2$, c'est à dire $\dim E_1 = 1$. Donc $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Autrement dit, la forme réduite de Jordan possède un seul bloc de Jordan associé à la valeur propre 1, de taille 3.

2. Puisqu'il y a une unique valeur propre triple 1, on a forcément $N_1 = \mathbb{R}^3$.

   D'après la forme réduite, le polynôme minimal de A ne saurait être que $m_A(X) = (X-1)^3 = -P_A(X)$, ce qui découle également du fait que $(A - I_3)^2 \neq 0$ $^{(\rightsquigarrow \text{ préambule})}$.

4. Lorsque, pour un endomorphisme nilpotent v d'un espace vectoriel E de dimension n, on a $\mathrm{rg}(v) = n-1$, tout vecteur $\mathbf{f}_n$ n'appartenant pas à $\mathrm{im}(v) = \ker(v^{n-1})$ est **cyclique** ($:\Leftrightarrow$ les images itérées non nulles $(\mathbf{f}_n, \mathbf{f}_{n-1} = v(\mathbf{f}_n), \cdots, \mathbf{f}_1 = v^{n-1}(\mathbf{f}_n))$ de $\mathbf{f}_n$ forment une base de E).

   Dans le cas présent, $(u-\mathrm{id})^2$ est nilpotent de rang 2, donc la façon la plus économique de Jordaniser $u - \mathrm{id}$, et donc u, est de choisir un vecteur cyclique, par exemple $\mathbf{f}_3 := \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, puis de calculer ses images itérées par l'endomorphisme $u - \mathrm{id}$:

   $\mathbf{f}_2 = (u-\mathrm{id})(\mathbf{f}_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{f}_1 = (u-\mathrm{id})(\mathbf{f}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$; on posera donc :

   $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3) = (\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$.

   (La probalité pour qu'un vecteur "pris au hasard" ne soit pas cyclique est nulle. Par ailleurs, au moins un vecteur de base *est nécessairement cyclique, le cas présent étant exceptionnel, dans la mesure où ni $\boldsymbol{e}_1$ ni $\boldsymbol{e}_3$ ne sont cycliques, puisque l'on a $u - \mathrm{id} : \boldsymbol{e}_1 \to a\boldsymbol{e}_3 \to 0$.)*

   Cette base est essentiellement unique, dans le sens où toute autre base Jordanisante est de la forme $(\lambda\mathbf{f}_1, \lambda\mathbf{f}_2, \lambda\mathbf{f}_3)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ quelconque.

   Dans les notations du cours, on a

$$K_3 = K_2 \oplus F_3, \text{ où } F_3 = <\mathbf{f}_3>,$$
$$K_2 = K_1 \oplus (u-\mathrm{id})(F_3) \text{ et } F_2 = \{0\}, \text{ ainsi que}$$
$$K_1 = (u-\mathrm{id})^2(F_3) \text{ et } F_1 = \{0\}.$$

1. (suite) Par construction même, $\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$ engendre le noyau de $u - \mathrm{id}$, c'est à dire E_1.

   Le système correspondant $^{(\rightsquigarrow \text{ préambule})}$ est du reste équivalent au système $x = y = 0$.

$\boxed{\text{cas } b \neq 1}$

1. $P_A(X) = (X-1)^2(X-b)$ et A possède deux valeurs propres distinctes 1 (double) et b (simple).

   E_1 est une droite $^{(\rightsquigarrow \text{ préambule})}$, engendré par, par exemple, $\begin{pmatrix} b-1 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}$.

   Le sous-espace propre E_b associé à la valeur propre b est obligatoirement de dimension 1, engendré par $\mathbf{e}_3$, comme on le déduit aisément de l'apparence de la troisième colonne de la matrice A, ou du fait que le système correspondant est équivalent au système $x = y = 0$.

3. $\mathrm{rg}(A - I_3) = \mathrm{rg}(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & b-1 \end{pmatrix}) = 2$, donc $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.

   Plus explicitement, $\dim N_1 = 2$ (puisque 1 est une valeur propre de multiplicité algébrique 2), tandis que $\dim E_1 = 1$. Donc la forme réduite de JORDAN comporte un seul bloc de taille 2 associé à la valeur propre 1 et un bloc de taille 1 associé à la valeur propre b.

   D'une façon équivalente, la taille du plus grand bloc de JORDAN associé à la valeur propre 1 correspond à l'exposant de $X - 1$ dans $m_A(X)$ (cf. infra). Cette taille est donc 2 ; autrement dit, il n'y a qu'un seul bloc.

2. Le sous-espace caractéristique N_1 associé à la valeur propre 1 est $\ker((u - \mathrm{id})^2)$.

   D'après la forme réduite, $E_1 \subsetneq N_1$, donc le polynôme minimal de A ne saurait être que $m_A(X) = (X-1)^2(X-b) = -P_A(X)$.

   N_1 a pour équation $a(b-1)x + ay + (b-1)^2 z = 0$ $^{(\rightsquigarrow \text{ préambule})}$, ce qui établit en particulier, d'une autre façon, que le polynôme minimal ne saurait être $(X-1)(X-b)$.

   Le sous-espace caractéristique associé à b est $N_b = E_b$, car b est une valeur propre de multiplicité algébrique 1.

4. On choisit
   – un vecteur $\mathbf{f}_3 \in E_b$, par exemple $\mathbf{f}_3 := \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ainsi qu'
   – un vecteur $\mathbf{f}_2 \in N_1 \setminus E_1$, par exemple $\mathbf{f}_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ b-1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   Enfin, on pose $\mathbf{f}_1 := (u - \mathrm{id})(\mathbf{f}_2) = \begin{pmatrix} b-1 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}$.

   (Ce vecteur appartient à $\ker(u - \mathrm{id})$ par construction même.)

   On posera donc $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3) = (\begin{pmatrix} b-1 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ b-1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$.

   Toute autre base Jordanisante est de la forme

   $(\lambda\mathbf{f}_1, \lambda\mathbf{f}_2 + \alpha\mathbf{f}_1, \mu\mathbf{f}_3) = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3) \begin{pmatrix} \lambda & \alpha & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$, avec $\lambda \neq 0 \neq \mu$.

   En particulier, si $a = 0$, on aurait pu prendre $\mathbf{f}_2 := \mathbf{e}_2$, puisque, dans ce cas, A est déjà sous forme réduite.

Exercice 3

$\boxed{\text{Préambule}}$

Soient :
– E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2,
– $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ une base de E,
– f un endomorphisme $E \to E$,
– A la matrice de f dans la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$,
– $P_f(X) = P_A(X) := X^2 - tX + d$ le polynôme caractéristique de f et

– $\Delta := t^2 - 4d$.

f est triangulisable sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $\Delta \geq 0$. On distinguera donc deux cas :

$\boxed{\text{cas } \Delta < 0}$

3. En dimension deux, un endomorphisme ayant une valeur propre est trigonalisable *par définition même.* Il s'ensuit qu'un endomorphisme f de E non trigonalisable sur $\mathbb{R}$ a deux valeurs complexes pures, distinctes, et conjuguées : λ et $\bar{\lambda}$. Sous forme exponentielle, il existe $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}\pi$ tels que $\lambda = \rho e^{i\theta}$.

La matrice A est donc semblable dans $M_2(\mathbb{C})$ à la matrice

$$B = \rho \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire que l'on a $B = P^{-1}AP$ pour une matrice de passage complexe

$$P = \begin{pmatrix} z & \overline{z} \\ w & \overline{w} \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}).$$

On pose alors

$$Q := \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(z) & -\mathrm{Im}(z) \\ \mathrm{Re}(w) & -\mathrm{Im}(w) \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}).$$

D'après les exercices 3 et 4 du TD n° 2, on a

$$Q^{-1}AQ = \rho R_\theta,$$

c'est-à-dire, les matrices A et ρR_θ sont semblables dans $M_2(\mathbb{R})$.

(Rappelons par ailleurs que, plus généralement, deux matrices réelles semblables sur $\mathbb{C}$ le sont sur $\mathbb{R}$.)

On a ainsi démontré qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est ρR_θ.

$\boxed{\text{cas } \Delta \geq 0}$

4. Soit f un endomorphisme de E trigonalisable. Il a donc deux valeurs propres (avec multiplicité) λ, μ dans $\mathbb{R}$.

Si f est diagonalisable, par définition, il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Rappelons par ailleurs que si les deux valeurs propres sont distinctes, alors f est nécessairement diagonalisable.

Donc, si f n'est pas diagonalisable, alors les valeurs propres sont égales et le théorème de Jordan affirme qu'il existe une base dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Cas particulier : $\mathrm{spec}(f) = \{\rho, \rho\}$ $(\rho \geq 0)$ *ou* $\mathrm{spec}(f) = \{-\rho, -\rho\}$ $(\rho > 0)$ *et f diagonalisable* :

Dans ce cas, f est une homothétie et sa matrice dans n'importe quelle base est donc scalaire $= \rho R_0 = \rho I_2$ ou $= \rho R_\pi = -\rho I_2$.

Y a-t-il d'autres matrices trigonalisables de la forme R_ϑ ?

2. Les valeurs propres (complexes) de g sont $e^{\pm i\theta}$. L'endomorphisme g est trigonalisable sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, elles sont réelles, c'est-à-dire, si, et seulement si, $\theta \in \mathbb{Z}\pi$. Dans ce cas, comme on vient de voir, la matrice R_θ est diagonale (égale à $\pm I_2$).

1. Soit u un vecteur. Puisque la base est orthonormée, nous pouvons calculer le produit scalaire et la norme par les formules usuelles. Un rapide calcul montre que $\|g(u)\| = \|u\|$, $u.g(u) = \|u\|^2 \cos\theta$ et que $\det(u, g(u)) = \|u\|^2 \sin\theta$ (le déterminant étant l'unique forme bilinéaire antisymétrique qui vaut 1 sur la base orthonormée, qui est donc déclarée directe). Ces trois relations montrent que l'angle orienté $(u, g(u))$ est de mesure θ et caractérisent la rotation d'angle θ.

5. Si f est un endomorphisme non trigonalisable sur $\mathbb{R}$ alors, d'après la question 3, il existe une base B de E dans laquelle la matrice de f est ρR_θ ($\rho > 0$, $\theta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}\pi$). Si de plus le déterminant de f est 1, alors $\rho = 1$. La matrice de f est bien celle d'une rotation.

Si l'on choisit donc sur E un produit scalaire qui rend la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ orthonormée, l'endomorphisme f sera une rotation (notion relative au choix d'un produit scalaire).

Cependant, si un produit scalaire est donnée au préalable (par exemple, si l'on pose $E := \mathbb{R}^2$), f sera uniquement *semblable* à une rotation.

De mauvais esprits appelleraient cela une question piège.

6. Soit h un endomorphisme de E. Les valeurs propres complexes de $\exp(h)$ sont les exponentielles des valeurs propres complexes de h (ce que l'on voit en effectuant les calculs dans une base où h est triangulaire).

On peut alors caractériser l'endomorphisme $\exp(h)$ en utilisant les questions 2 et 3.

On étudiera cependant plutôt l'image de l'application correspondante $\exp : \mathfrak{gl}_2(\mathbb{R}) \to GL_2(\mathbb{R})$, plus apte aux calculs.

Rappelons que l'on a pour toute matrice inversible $P \in GL_2(\mathbb{R})$

$$P^{-1}(\exp(A))P = \exp(P^{-1}AP),$$

c'est-à-dire que $\mathrm{im}(\exp)$ est invariant par conjugaison. En particulier, $A \in \mathrm{im}(\exp)$ si, et seulement si, sa forme canonique (établie aux questions 3 et 4) appartient à $\mathrm{im}(\exp)$.

Or, on a les identités suivantes :

$$\exp(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} e^\lambda & 0 \\ 0 & e^\mu \end{pmatrix},$$

$$\exp(\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}) = \exp(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \exp(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}).\exp(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$$
$$= \begin{pmatrix} e^\lambda & 0 \\ 0 & e^\lambda \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^\lambda & e^\lambda \\ 0 & e^\lambda \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$\exp(\begin{pmatrix} \log\rho & -\vartheta \\ \vartheta & \log\rho \end{pmatrix}) = \exp(\begin{pmatrix} \log\rho & 0 \\ 0 & \log\rho \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\vartheta \\ \vartheta & 0 \end{pmatrix})$$
$$= \exp(\begin{pmatrix} \log\rho & 0 \\ 0 & \log\rho \end{pmatrix}).\exp(\begin{pmatrix} 0 & -\vartheta \\ \vartheta & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \rho R_\vartheta$$

$$(\text{en particulier } \exp(\begin{pmatrix} \log\rho & -\pi \\ \pi & \log\rho \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -\rho & 0 \\ 0 & -\rho \end{pmatrix}).$$

Observons également que $\begin{pmatrix} e^\lambda & e^\lambda \\ 0 & e^\lambda \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} e^\lambda & 1 \\ 0 & e^\lambda \end{pmatrix}$ sont semblables, puisque non diagonalisables.

Enfin, les valeurs propres de ρR_ϑ sont non-réelles, sauf si $\vartheta \in \pi\mathbb{Z}$.

On en déduit aisément qu'une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ appartient à im(exp) si, et seulement si, elle est scalaire non-nulle (*y compris négative*) ou ces valeurs propres sont distinctes et, soit non réelles, soit *strictement positives*.

7. Deux endomorphismes de E qui ont même déterminant et même trace ont le même polynôme caractéristique ($X^2 - X\mathrm{tr}f + \det f$) et ont donc les mêmes valeurs propres (complexes). On distingue ensuite les trois cas rencontrés aux questions 3 et 4.

1. Si l'une des valeurs propres est complexe mais pas réelle, alors elles le sont toutes les deux et elles sont conjuguées. Il existe donc une base pour chacun de f et g dans laquelle la matrice est ρR_θ, ρ et θ sont entièrement déterminés par la paire de valeurs propres et f et g sont donc semblables.
2. Si les deux valeurs propres sont réelles et distinctes alors il y a des bases dans lesquelles les matrices de f et g sont diagonales et donc f et g sont semblables.
3. Si les deux valeurs propres sont réelles et égales, alors si l'un des endomorphismes était diagonalisable il y aurait une base dans laquelle sa matrice serait λI_2 et donc l'endomorphisme en question serait une homothétie ; ceci est exclu par hypothése. Aucun des endomorphismes f et g n'est donc diagonalisable et on est dans le dernier cas de la question 4 : il existe des bases dans lesquelles les matrices de f et g sont

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

   Les endomorphismes sont donc semblables.

Nous avons ainsi montré que deux endomorphismes qui ne sont pas des homothéties sont semblables si, et seulement si, ils ont même déterminant et même trace.

8. Le théorème de Jordan affirme que les matrices de Jordan :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ne sont pas semblables. En particulier, les sous-espaces propres associés à la valeur propre 1 sont de dimensions différentes. Les deux matrices ont le même polynôme caractéristique, à savoir $(1 - X)^3$.

Notons par ailleurs que les matrices de l'exercice 2 (cas $b = 1$) correspondent aux deux cas précités, et ce selon que $a \neq 0$ ou non.