UNIVERSITÉ DE PROVENCE LICENCE DE MATHÉMATIQUES - M41
2004-2005

Algèbre et Géométrie - PARTIEL du 1er avril 2005

Ex. 1. (Questions de cours)
Énoncer et démontrer le théorème concernant la trigonalisabilité des endomorphismes.

Ex. 2. (Jordanisation)
On considère deux réels a et b et la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & b \end{pmatrix}$$

Déterminer en fonction de a et b

1. le polynôme caractéristique de A, ses valeurs propres, ses sous-espaces propres,
2. ses sous-espaces caractéristiques, son polynôme minimal
3. une forme réduite de Jordan de A.
4. une base dans laquelle l'endomorphisme défini par A est donné par une matrice de Jordan.

Ex. 3 (endomorphismes de $\mathbb{R}^2$) Soit $E = \mathbb{R}^2$ le plan euclidien standard.

1. Montrer qu'un endomorphisme g qui, *dans une base orthonormale*, est défini par une matrice de la forme
$$R_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$
est une rotation. *Indication : calculer* $\cos\angle(x, g(x))$ *pour* $x \in E \setminus \{0\}$.
2. Pour quelles valeurs de $\theta \in \mathbb{R}$ un tel endomorphisme g est-il trigonalisable sur $\mathbb{R}$?
3. Montrer que pour tout endomorphisme f *non-trigonalisable* sur $\mathbb{R}$ de E il existe une base B de E dans laquelle la matrice de f est de la forme ρR_θ, où $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi$.
4. Montrer que pour tout endomorphisme f de E *trigonalisable* sur $\mathbb{R}$ il existe une base B de E dans laquelle la matrice de f est l'une des matrices suivantes :
$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ où } \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}\ .$$
5. Peut-on en conclure que tout endomorphisme de E de déterminant 1 qui n'est pas trigonalisable est une rotation ?
6. En utilisant les formes canoniques trouvées aux questions 3 et 4, déterminer, pour un endomorphisme arbitraire f de E, des conditions nécessaires et suffisantes sur le spectre de f pour que f appartienne à l'image de l'application exp, c'est à dire pour que l'on ait $f = \exp(h)$ pour un endomorphisme convenable h.
7. Montrer que si f et g sont deux endomorphismes de E qui ne sont pas des homothéties sont semblables si, et seulement si, ils ont même déterminant et même trace.
8. Donner deux matrices 3×3 réelles non-diagonalisables, avec le même polynôme caractéristique, qui ne sont pas semblables.