Problème : Groupes et géométrie, notion de sous-groupe distingué, homomorphismes

Dans ce problème, on se propose d'introduire par l'exemple la notion de groupe et de sous-groupe distingué à partir des groupes de symétrie de quelques figures classiques de la géométrie.

Les questions marqués d'un $\boxed{\text{r}}$ *peuvent être entièrement et rigoureusement rédigées.* A contrario *les autres réponses peuvent être moins rigoureuses. Des dessins doivent bien sûr illustrer le propos.*

Une isométrie est une application d'un espace métrique dans lui même (ici le plan ou l'espacs affine euclidien) qui conserve les distances.

1. Les isométries

a) $\boxed{\text{r}}$ Montrer qu'une isométrie est une injection.

b) **(difficile)** Montrer qu'une isométrie est une bijection.

c) $\boxed{\text{r}}$ Montrer qu'une isométrie conserve l'alignement et les milieux.

On utilisera brièvement à la question 6 qu'une isométrie est une application affine : elle conserve les barycentres. (Ceci n'est pas très difficile mais n'est pas demandé ici)

d) $\boxed{\text{r}}$ Soit f une isométrie, montrer qu'il existe une translation t telle que $t \circ f$ admet un point fixe.

e) Rappeler quelles sont les isométries du plan.

f) Montrer que toute isométrie du plan est la composée d'une, deux ou trois symétries axiales.

2. Isométries directes et indirectes

a) $\boxed{\text{r}}$ Montrer, en utilisant le théorème d'Al-Kachi, que les isométries conservent les angles géométriques (c'est-à-dire les angles mais pas forcément leur orientation).

On classe donc les isométries en isométries directes (celles qui conservent les angles) et isométries indirectes (celles qui transforment un angle en son opposé).

b) Montrer que la composée de deux isométries directes ou de deux isométries indirectes est une isométrie directe alors que la composée d'une isométrie directe et d'une isométrie indirecte est une isométrie indirecte.

c) $\boxed{\text{r}}$ Soit s, s' deux isométries indirectes, montrer qu'il existe des isométries directes f et g tels que $s' = f \circ s = s \circ g$.

3. Isométries d'un triangle équilatéral.

Soit ABC un triangle équilatéral du plan.

a) Donner la liste des six isométries du plan qui laissent fixe globalement le triangle ABC.

b) Montrer que trois de ces isométries sont directes et trois indirectes.

c) Montrer que la composée de deux de ces isométries est encore une isométrie du triangle équilatéral (on pourra écrire la table de composition de ces six isométries).

On dit que ces six isométries forment le **groupe des isométries du triangle équilatéral**.

d) Montrer que si σ est une permutation de l'ensemble $\{A, B, C\}$, il existe une isométrie f du triangle ABC qui permute les sommets de la même manière que σ.

e) Montrer que si $A'B'C'$ est un autre triangle équilatéral les groupes des isométries de ABC et de $A'B'C'$ sont les mêmes, dans un sens que l'on précisera.

4. Isométries du tétraèdre régulier. Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier.

a) Donner la liste des vingt-quatre isométries de l'espace qui laissent fixe globalement le tétraèdre $ABCD$.

b) Montrer que douze de ces isométries sont directes et douze indirectes.

c) $\boxed{\text{r}}$ Montrer que la composée de deux isométries qui laissent fixe globalement le tétraèdre $ABCD$ laisse encore fixe ce tétraèdre (cette fois on aura intérêt à ne pas utiliser la liste et à ne pas écrire la table de composition qui commence à être longue).

On dit que ces vingt-quatre isométries forment le **groupe des isométries du tétraèdre régulier**.

Soit d_1, d_2, d_3 les trois diagonales du tétraèdre $ABCD$ (les droites passant par les milieux de deux côtés opposés).

d) Montrer qu'une isométrie du tétraèdre $ABCD$ laisse globalement fixe l'ensemble des trois diagonales $\{d_1, d_2, d_3\}$.

e) Donner la liste des quatre isométries du tétraèdre régulier qui laissent globalement fixe chacune des trois diagonales du tétraèdre $ABCD$.

5. Isométries du cube. Soit $ABCDEFGH$ un cube.

a) Donner la liste des quarante-huit isométries de l'espace qui laissent fixe globalement le cube $ABCDEFGH$.

b) Montrer que vingt-quatre de ces isométries sont directes et vingt-quatre sont indirectes.

c) Montrer que la symétrie centrale commute avec toutes les isométries du cube.

d) Montrer que $ACFH$ et $BDEG$ forment des tétraèdres réguliers.

e) Montrer qu'une isométrie du cube échange ces deux tétraèdres ou les laisse chacun globalement fixe.

f) Donner la liste des vingt-quatre isométries du cube qui laisse chacun des deux tétraèdres globalement fixe.

g) Montrer que toute isométrie f du cube s'écrit de manière unique $f = g \circ z = z \circ g$ où z est l'identité ou la symétrie centrale et où g est une isométrie qui laisse chacun des deux tétraèdres globalement invariant.

h) Montrer que cette décomposition de f en g et z est compatible avec la composition.

6. Polyèdres duaux

a) Montrer que l'ensemble des milieux des faces d'un cube forme un octaèdre régulier et réciproquement. En déduire que le groupe des isométries du cube et de l'octaèdre réguliers sont égaux.

b) Montrer que l'ensemble des milieux des faces d'un dodécaèdre régulier forme un icosaèdre régulier et réciproquement. En déduire que les groupes d'isométries de l'icosaèdre régulier et du dodécaèdre régulier sont égaux.

7. Isométries du dodécaèdre

a) $\boxed{\text{r}}$ Montrer que le groupe des isométries du dodécaèdre contient autant d'isométries directes que d'isométries indirectes.

b) Montrer que l'on peut grouper les vingt sommets d'un dodécaèdre régulier pour former cinq cubes (on essayera de répondre à cette question en dessinant un dodécaèdre régulier et un des cinq cubes inscrits).

c) Donner les deux isométries du dodécaèdre qui laissent fixe globalement chacun de ces cinq cubes.

8. Groupes, sous-groupes distingués, morphismes.

a) Montrer que l'application qui à une isométrie associe ± 1 suivant qu'elle est directe ou indirecte est un homomorphisme de groupe dont le noyau est le sous-groupe distingué des isométries directes.

b) Montrer que le groupe des isométries du triangle équilatéral a un sous-groupe distingué commutatif à trois éléments.

c) Montrer que les trois diagonales du tétraèdre définissent un homomorphisme du groupe des isométries du tétraèdre dans le groupe des isométrie du triangle équilatéral dont le noyau est le groupe à deux éléments.

d) Montrer que les deux tétraèdres inscrits dans le cube définissent un homomorphisme du groupe des isométries du cube dans le groupe à deux éléments dont le noyau est le groupe des isométries du tétraèdre.

e) Montrer que les cinq cubes inscrits dans le dodécaèdre définissent un homomorphisme du groupe des isométries du dodécaèdre dans le groupe des permutations de cinq objets (les cinq cubes) dont le noyau est le groupe à deux éléments.

f) **(très difficile)** Montrer que l'on obtient ainsi toutes les permutations positives du groupe des permutations de cinq objets.

9. Le théorème d'Abel

N. Abel a reçu une gloire éternelle pour avoir démontré (à vingt ans) ce théorème.

(Question impossible) Montrer que le groupe des permutations positives de cinq objets qui apparait à la question 8 f) ne peut pas se décomposer en groupes plus simple comme dans les groupes des questions 8 b) à 8 d).