Exercice I. Matrice compagnon. 1. Soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ un polynôme complexe unitaire de degré n. On appelle **matrice compagnon** de P la matrice

$$A = \mathrm{comp}(P) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -a_2 \\ & & & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

a. Montrer que le polynôme caractéristique de A est $(-1)^n P$.

b. Soit $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ le premier vecteur de la base canonique. Calculer $Ae_1, \ldots, A^{n-1}e_1$ et montrer que $(e_1, Ae_1, \ldots, A^{n-1}e_1)$ est une base de $\mathbb{C}^n$.

c. Soit Q un polynôme annulateur de A de degré $d \geq 0$. Montrer que pour tout vecteur $u \in \mathbb{C}^n$, $u, Au, \ldots, A^d u$ est un système lié.

d. Déduire des questions précédentes que le polynôme minimal de A est P.

e. Montrer que la forme normale de Jordan de A contient exactement un bloc de Jordan associé à chaque valeur propre λ et que celui-ci est de taille la multiplicité algébrique de λ.

f. Préciser la multiplicité géométrique des valeurs propres de A.

2. Réciproquement, soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice dont le polynôme minimal m_A est de degré n.

a. Montrer que le polynôme caractéristique P_A de A est égal (au signe près) au polynôme minimal m_A : $P_A = (-1)^n m_A$.

b. Montrer que la forme normale de Jordan de A contient exactement un bloc de Jordan associé à chaque valeur propre λ et que celui-ci est de taille la multiplicité algébrique de λ.

c. En déduire que A est semblable à la matrice compagnon de son polynôme minimal.

3. Donner deux matrices A et B telles que $P_A = P_B$ et $m_A = m_B$ et qui ne sont pas semblables.

Exercice II. Théorème de Perron-Frobénius.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice non nilpotente dont tous les coefficients sont positifs. Soit $\mathcal{P} = (\mathbb{R}^+)^n$ le **cône positif** de $\mathbb{R}^n$ et $H = \{u \in (\mathbb{R}^+)^n \mid u_1 + \cdots + u_n = 1\}$ l'intersection de la sphère unité pour la norme $\| \|_1$ avec $\mathcal{P}$.

1. a. Montrer que $A\mathcal{P}(= \{Au \mid u \in \mathcal{P}\}) \subseteq \mathcal{P}$.

b. Montrer que $(A^k\mathcal{P})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non vides et que $(A^k\mathcal{P} \cap H)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de compacts non vides.

c. Soit $C = \cap_{k=0}^{\infty} A^k\mathcal{P}$ et $K = C \cap H$. Déduire des questions précédentes que K est non-vide et que C n'est pas réduit à $\{0\}$.

d. Montrer que pour tout vecteur non-nul u de C, Au est non-nul.

e. Montrer que l'application $f\ : K \to K$ définie par $f(u) = \frac{Au}{\|Au\|_1}$ est continue.

f. Montrer que $\mathcal{P}$, H, C et K sont convexes (rappels : une intersection de convexes est convexe, l'image d'un convexe par une application linéaire est convexe).

g. Nous admettons le

Théorème [Brouwer] *Toute application continue d'un compact convexe non-vide de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même admet au moins un point fixe.*

En déduire que f admet au moins un point fixe.

h. Soit u un point fixe de f. Montrer que u est un vecteur propre de A associé à une valeur propre positive λ. Remarquer que u est un vecteur à coordonnées positives.

Nous avons ainsi montré que A possède des valeurs propres positives associées à des vecteurs propres à coordonnées positives. Nous désignons par λ_0 la plus grande de ces valeurs propres et par u_0 un vecteur propre associé à λ_0 et à coordonnées positives.

2. Soit u un autre vecteur propre de A associé à une valeur propre λ (éventuellement u et λ sont complexes).

a. Montrer que $A|u| \geq |Au| = |\lambda|\,|u|$. Où $|v|$ désigne le vecteur formé par les modules des coordonnées de v et où $v \geq w$ signifie que chaque coordonnée de v est supérieure ou égale à la coordonnée correspondante de w.

b. Soit $\mathcal{P}_{|\lambda|} = \{v \in \mathcal{P} \mid Av \geq |\lambda| v\}$. Montrer que $\mathcal{P}_{|\lambda|}$, $C_{|\lambda|} = \cap_{k=0}^{\infty} A^k\mathcal{P}_{|\lambda|}$ et $K_{|\lambda|} = C_{|\lambda|} \cap H$ sont non-vides.

c. En déduire qu'il existe un vecteur u_1 à coordonnées positives associé à une valeur propre positive λ_1 telle que $\lambda_1 \geq |\lambda|$.

d. Conclure que $\lambda_0 \geq |\lambda|$.

Nous avons ainsi montré le

Théorème [Perron-Frobénius] *Soit $A \in M_n(\mathbb{R}^+)$ une matrice réelle à coefficients positifs. A possède une valeur propre positive λ_0 associée à un vecteur propre u_0 à coordonnées positives tels que λ_0 majore le module de toutes les valeurs propres de A.*

3. Application. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Dessiner les images successifs par A des vecteurs de la base canonique. Dessiner les $A^k\mathcal{P}$ pour $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

b. Dessiner u_0 et calculer λ_0.