Question de cours. 1. Donner la définition d'un sous-espace caractéristique.

Soit f un endomorphisme linéaire d'un k-espace vectoriel E de dimension finie et $\lambda \in k$ une valeur propre de f. Soit α la mulitplicité algébrique de la valeur propre λ (α est l'exposant de $(X - \lambda)$ dans le polynôme caractéristique P_f de f). Le sous-espace caractéristique de f associé à la valeur propre λ est

$$N_\lambda = \ker(f - \lambda id)^\alpha.$$

C'est un sous-espace invariant par f et de dimension α.

2. Démontrer que la dimension d'un sous-espace caractéristique est égale à la multiplicité algébrique de la valeur propre correspondante.

Dans les conditions de la question précédente, $P_f(X) = (X - \lambda)^\alpha Q$, où Q est un polynôme dont λ n'est pas racine et donc Q et $(X - \lambda)^\alpha$ sont premiers entre eux. Le théorème de CAYLEY-HAMILTON affirme que $P_f(f) = 0$ et le théorème de décomposition des noyaux affirme que

$$E = N_\lambda \oplus \ker Q(f).$$

Les deux sous-espaces N_λ et $\ker Q(f)$ sont invariants par f, nous pouvons donc considérer les restrictions f_λ et g de f à N_λ et $\ker Q(f)$ respectivement. $(X - \lambda)^\alpha$ est un polynôme annulateur de f_λ et donc f_λ n'a qu'une seule valeur propre λ et est trigonalisable ; son polynôme caractéristique est $(X - \lambda)^\beta$ où β est la dimension de N_λ. De même Q est un polynôme annulateur de g et donc λ n'est pas une valeur propre de g, $(X - \lambda)$ ne divise donc pas le polynôme caractéristique P_g de g et P_g et $(X - \lambda)^\alpha$ sont premiers entre eux.
Les polynômes caractéristiques de f, f_λ et g sont liés par la relation

$$P_f = P_{f_\lambda} P_g$$

(car si nous choisissons une base $\mathcal{B}_\lambda$ de N_λ et une base $\mathcal{B}'$ de $\ker Q(f)$, alors leur réunion $\mathcal{B} = \mathcal{B}_\lambda \cup \mathcal{B}'$ est une base de E dans laquelle la matrice de f est

$$[f]_\mathcal{B} = \left(\begin{array}{c|c} [f_\lambda]_{\mathcal{B}_\lambda} & 0 \\ \hline 0 & [g]_{\mathcal{B}'} \end{array}\right).)$$

De cette égalité nous déduisons

$$(X - \lambda)^\alpha Q = (X - \lambda)^\beta P_g$$

et comme Q et P_g sont premiers à $(X - \lambda)$,

$$\alpha = \beta$$

ce qui est l'égalité cherchée entre la multiplicité algébrique α de la valeur propre λ et la dimension β du sous-espace caractéristique N_λ associé.

Exercice I. Soit E le plan vectoriel réel. Soit f un endomorphisme linéaire de E dont le polynôme caractéristique est $P_f(X) = X^2 + 1$.

1. Quelles sont les valeurs propres réelles et complexes de f ?

Les valeurs propres de f sont les racines de son polynôme caractéristique ce sont les nombres complexes i et $-i$. f n'a pas de valeurs propres réelles.

2. Soit u un vecteur non-nul de E.

a. Montrer que $(u, f(u))$ est une base de E.

Si $(u, f(u))$ n'est pas une famille libre, comme u est non nul, nous avons une relation $f(u) = \lambda u$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. λ est une valeur propre réelle de f ce qui est impossible. $(u, f(u))$ est donc libre et comme E est de dimension 2 c'est une base de E.

b. Montrer que $f^2(u) = -u$.

D'après le théorème de Cayley-Hamilton le polynôme caractérisitique est un polynôme annulateur : $P_f(f) = 0$ et en particulier $P_f(f)(u) = 0$ ce qui nous donne $(X^2+1)(f)(u) = (f^2 + id)(u) = (f^2(u) + u) = 0$ et donc $f^2(u) = -u$.

c. Donner la matrice de f dans la base $(u, f(u))$.

La matrice de f dans la base $(u, f(u))$ est donc

$$[f]_{(u,f(u))} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Déduire de la question précédente que deux endomorphismes de E dont le polynôme caractéristique est $X^2 + 1$ sont conjugués (ou, ce qui revient au même, que deux matrices réelles de polynôme caractéristique $X^2 + 1$ sont semblables).

Soit f et g deux endomorphismes linéaires de E dont le polynôme caractéristique est X^2+1. Soit u un vecteur non nul. D'après les questions précédentes $(u, f(u))$ et $(u, g(u))$ sont des bases de E dans lesquelles les matrices sont

$$[f]_{(u,f(u))} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = [g]_{(u,g(u))}.$$

Les deux endomorphismes sont donc conjugués par l'isomorphisme linéaire h qui envoie la base $(u, f(u))$ sur la base $(u, g(u))$:

$$hfh^{-1} = g$$

(égalité que nous pouvons vérifier aisément en calculant les images des vecteurs de la base $(u, g(u))$.)

On considère maintenant E un espace vectoriel réel de dimension 4. Soit f un endomorphisme linéaire de E dont le polynôme minimal est $m_f(X) = X^3 - X^2 + X - 1$.

4. Quelles sont les valeurs propres réelles et complexes de f ?

Nous factorisons $m_f(X) = X^3 - X^2 + X - 1 = (X-1)(X^2+1)$, les valeurs propres complexes de f sont donc 1, i et $-i$. f n'a qu'une seule valeur propre réelle : 1.

5. Rappeler les relations entre les polynômes caractéristique et minimal d'un endomorphisme.

Le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique et ils ont les mêmes racines (plus généralement, ils ont aussi les mêmes facteurs irréductibles).

6. Donner le polynôme caractéristique P_f de f.

Nous savons que m_f divise P_f, que P_f est de degré la dimension de E c'est-à-dire 4 et que P_f est un polynôme unitaire. Nous en déduisons qu'il existe un polynôme de degré 1 : $(X-\lambda)$ où λ est un réel tel que $m_f(X)(X-\lambda) = P_f(X)$. λ est alors une valeur propre réelle de f et donc $\lambda = 1$ d'après les questions précédentes. Ainsi

$$P_f(X) = (X-1)^2(X^2+1).$$

7. Donner la dimension du sous-espace caractéristique N_1 associé à la valeur propre 1.

Comme dans la question de cours, la dimension de N_1 est la multiplicité algébrique de la valeur propre 1 c'est donc 2.

8. Donner la dimension de $\ker(X^2+1)(f)$.

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $P_f(f) = 0$. D'après le théorème de décomposition des noyaux $E = N_1 \oplus \ker(X^2+1)(f)$. Et puisque $\dim E = 4$ et $\dim N_1 = 2$ nous en déduisons que

$$\dim \ker(X^2+1)(f) = 2.$$

9. Donner la multiplicité géométrique de la valeur propre 1.

Toujours d'après le théorème de décomposition des noyaux et puisque m_f est un polynôme annulateur de f, $E = \ker(X-1)(f) \oplus \ker(X^2+1)(f)$. Le sous-espace propre $E_1 = \ker(X-1)(f)$ a donc pour dimension $\dim E - \dim\ker(X^2+1)(f) = 2$. La multiplicité géométrique de la valeur propre 1 est donc 2. Remarquons que nous avons donc $E_1 = N_1$.

10. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $V = \ker(X^2+1)(f)$. V est un sous-espace invariant par f de dimension 2. Soit g la restriction de f à V, alors X^2+1 est un polynôme annulateur de g et d'après le début de l'exercice pour tout vecteur u de V, $(u, g(u))$ est une base de V dans laquelle la matrice de g est

$$[g]_{(u,g(u))} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

remarquons que $g(u) = f(u)$ par définition. Soit (e_1, e_2) une base de $E_1 = N_1$, alors d'après la question précédente, $(u, f(u), e_1, e_2)$ est une base de E dans laquelle la matrice de f est

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice II. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.

Un rapide calcul donne $P_A(X) = -(X-2)^3$.

2. Calculer les sous-espaces propres et caractéristiques de A et préciser leurs dimensions.

$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ c'est une matrice de rang 1 et de noyau le plan vectoriel E_2 d'équation $-x+y+2z=0$, c'est le sous-espace propre de A associé à l'unique valeur propre 2, il est de dimension 2. $E = \mathbb{R}^3$ est le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre 2.

3. Donner le polynôme minimal de A.

Un rapide calcul donne $(A-2I_3)^2 = 0$ et nous avons vu que $A - 2I_3 \neq 0$ donc le polynôme minimal de A est $m_A(X) = (X-2)^2$.

4. Donner la forme de JORDAN de A.

La forme de JORDAN de A possède deux blocs de JORDAN associés à la valeur propre 2 car la multiplicité geométrique de 2 est 2. Le plus grand bloc de JORDAN associé à la valeur propre 2 est de taille 2 car 2 est l'exposant de $(X-2)$ dans le polynôme minimal $m_A(X)$. Puisque nous sommes en dimension 3 la matrice A est semblable à la matrice de JORDAN $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Préciser une matrice de passage P telle que $P^{-1}AP$ est une matrice de JORDAN.

Soit $e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ un vecteur qui n'est pas dans E_2. Soit $e_1 = Ae_2 - 2e_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, c'est un vecteur de E_2 (ce qui est normal puisque $(A-I_2)^2 = 0$ donc $(A-I_2)^2 e_2 = (A-I_2)e_1 = 0$). Soit enfin e_3 un vecteur de E_2 qui n'est pas colinéaire à e_1, par exemple $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors (e_1, e_2, e_3) est une base de $E = \mathbb{R}^3$, la matrice de passage entre la base canonique et cette base est

$$P = \begin{pmatrix} 12 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$