Documents et calculatrices interdits, téléphones portables éteints et rangés

Trois heures

Questions de cours. *Les questions sont indépendantes.*

1. Donner une norme de $M_n(\mathbb{R})$ pour laquelle les éléments du groupe orthogonal, $O_n(\mathbb{R})$, sont tous de normes 1 (vous montrerez que ce que vous proposez est bien une norme).

2. Énoncer et démontrer le théorème de décomposition des noyaux (on se limitera au cas de deux polynômes).

3. Soit f un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel de dimension n. Montrer que l'indice de nilpotence de f est inférieur ou égal à n.

Exercice I. **1.** Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Les deux matrices ont une seule valeur propre double 1, elles ne sont pas égales à l'identité, elles ont donc la mêm forme normale de JORDAN : $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et sont donc semblables.

2. Donner la forme normale de JORDAN des matrices

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

C est nilpotente d'indice de nilpotence 2 ($C^2 = 0$). Sa forme normale de JORDAN n'a donc que des blocs de JORDAN associé à la valeur propre 0 et le plus grand d'entre eux est de taille 2. La forme normale de JORDAN de C est donc $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$D-2I_3$ est nilpotente d'indice de nilpotence 3 ($(D-2I_3)^2 \neq 0$). La normale de JORDAN n'a donc que des blocs de JORDAN associé à la valeur propre 2 et le plus grand d'entre eux est de taille 3. La forme normale de JORDAN de D est donc $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Donner la forme normale de JORDAN, J, de la matrice E ainsi qu'une matrice de passage $P \in GL_4(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}EP = J$:

$$E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nous constatons par le calcul que $(E+I_4)^2 = 0$ donc le plus grand bloc de JORDAN de la forme normale de E est de taille 2.
Nous constatons aisément que $E+I_4$ est de rang 2 et donc son noyau est de dimension $4-2=2$. Nous en déduisons que la forme normale de JORDAN de E possède deux blocs.
La forme normale de JORDAN de E est donc $J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Pour trouver une matrice de passage nous donnons d'abord les équations du sous-espace propre associé à la valeur propre -1 : $E_{-1} \quad : x_2 + 2x_3 = 0, \quad x_4 = 0$. Un supplémentaire de E_{-1} est le plan vectoriel V de base $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Soit
$e_1 = (E+I_4)e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_3 = (E+I_4)e_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4), alors $P^{-1}EP = J$.

Exercice II. **1.** Soit A une matrice de $SU_2(\mathbb{C})$.

a. Montrer A est diagonalisable dans une base hermitienne et que ses valeurs propres sont de module 1 et inverses l'une de l'autre : $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ où θ est un réel.

$SU_2(\mathbb{C})$ est le groupe des matrices $A \in M_2(\mathbb{C})$ telles que ${}^t\bar{A}A = I_2$ et $det(A) = 1$. A est donc une matrice normale (${}^t\bar{A}A = A{}^t\bar{A}$), elle est donc diagonalisable dans une base hermitienne. Comme le déterminant de A est 1 le produit des valeurs propres est 1 et les deux valeurs propres sont inverses l'une de l'autre.
De plus sur X est un vecteur propre associé à une valeur propre λ de A on a

$$\|AX\|^2 =< AX, AX >=^t (\overline{AX})AX =^t \bar{X}({}^t\bar{A}A)X =^t \bar{X}X =< X, X >= \|X\|^2$$

$$=^t \overline{\lambda X}\lambda X = \bar{\lambda}\lambda^t\bar{X}X = \bar{\lambda}\lambda < X, X >= \bar{\lambda}\lambda\|X\|^2.$$

Nous en déduisons que $|\lambda|^2 = \bar{\lambda}\lambda = 1$ et qu'il existe un réel θ (défini modulo 2π) tel que $\lambda = e^{i\theta}$.

b. Donner la valeur de θ en fonction de la trace de A.

Puisque les valeurs propres de A sont $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$, la trace de A est la somme des valeurs propres : $2\cos\theta$.

2. Déduire des questions précédentes que si A et B sont deux matrices de $SU_2(\mathbb{C})$ les assertions suivantes sont équivalentes

1. A et B sont semblables ;
2. A et B ont même trace ;
3. A et B ont les mêmes valeurs propres ;
4. A et B sont conjugués dans $SU_2(\mathbb{C})$.

1.$\Rightarrow$ 2. C'est du cours.
2.$\Rightarrow$ 3. Comme la trace est $2\cos\theta = 2\cos\theta'$ nous en déduisons que $\theta = \pm\theta'$ et que les matrices A et B ont les mêmes valeurs propres $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$.
3.$\Rightarrow$ 4. D'après la question 1.a. les matrices A et B sont deux semblables dans des basees hermitiennes à la même matrice $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$. Quitte à multiplier les matrices de passages qui sont unitaires (car les bases sont hermitiennes) il existe une matrice unitaire $P \in U_2(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = B$. Si $det(P) = 1$ nous avons terminé. Sinon soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $e^{-2i\alpha} = det(P)$ (α existe car $det(P)$ est un complexe de module 1). Posons alors $Q = e^{i\alpha}P$, nous constatons que $det(Q) = 1$ et que Q est dans $SU_2(\mathbb{C})$. Enfin $Q^{-1}AQ = P^{-1}AP = B$.
4.$\Rightarrow$ 1. C'est immédiat.

3. a. Montrer que toute matrice de $SU_2(\mathbb{C})$ est de la forme $\begin{pmatrix} u & -\bar{v} \\ v & \bar{u} \end{pmatrix}$ où u et v sont deux nombres complexes tels que $|u|^2 + |v|^2 = 1$.

Si $A = \begin{pmatrix} u & w \\ v & z \end{pmatrix}$ La formule de la commatrice nous donne $\begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{v} \\ \bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} =^t \bar{A} = A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} z & -w \\ -v & u \end{pmatrix}$. Comme $det(A) = 1$ nous en déduisons que $z = \bar{u}$ et $w = -\bar{v}$. Enfin le calcul du coefficient en haut à gauche de ${}^t\bar{A}A$ nous donne $u\bar{u} + v\bar{v} = 1$ ce qui est la condition cherchée.

b. Soit $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}$ les parties réelles et imaginaires de u et v respectivement ($u = u_1 + iu_2$ et $v = v_1 + iv_2$). Montrer que l'application

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & SU_2(\mathbb{C}) & \to & \mathbb{S}^3 \\ & \begin{pmatrix} u & -\bar{v} \\ v & \bar{u} \end{pmatrix} & \mapsto & (u_1, u_2, v_1, v_2) \end{array}$$

est un homéomorphisme. *(Ici $\mathbb{S}^3$ est la sphère unitaire euclidienne dans $\mathbb{R}^4$.)*

L'application φ est injective car d'après la question précédente si on connait la première colonne d'une matrice unitaire spéciale on la connait tout entière.
Elle est surjective car si je me donne les coordonnées (u_1, u_2, v_1, v_2) alors un rapide calcul montre que la matrice correspondante est bien dans $SU_2(\mathbb{C})$.
Pour montrer que φ est continue il suffit de montrer que chacune de ses quatre fonctions coordonnées sont continues. Ce qui est le cas puisque l'application qui a un nombre complexe associe sa partie imaginaire ou sa partie réelle est continue.
Puisque l'espace de départ est compact, l'inverse d'une application bijective continue est continue.
Nous avons montré que φ est un homéomorphisme.

Exercice III. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Donner le polynôme caractéristique de A, ses valeurs propres complexes et leurs multiplicités (algébriques et géométriques).

A est la matrice compagnon de $P_A(X) = X^4 + 2X^2 + 1 = (X^2+1)^2$. A n'a donc pas de valeurs propres réelles et deux valeurs propres complexes de multiplicité algébrique 2 : i et $-i$. Nous constatons que le rang de $A - iI_4$ et de $A + iI_4$ est 3, les sous-espaces propres E_i et E_{-i} sont donc de dimension 1. Les valeurs propres i et $-i$ sont de mulitplicité géométrique 1.

2. Montrer que les sous-espaces propres E_i et E_{-i} associés aux valeurs propres i et $-i$ respectivement sont conjugués.

3. Montrer que les sous-espaces caractéristiques N_i et N_{-i} associés aux valeurs propres i et $-i$ respectivement sont conjugués.

4. Montrer qu'il existe des vecteurs e_1 et e_2 de $\mathbb{C}^4$ tels que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \bar{e_1}, \bar{e_2})$ est une base de $\mathbb{C}^4$ et si P est la matrice de passage entre la base canonique et $\mathcal{B}$ alors

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

5. Soit $f_1 = e_1 + \bar{e_1}$, $f_2 = ie_1 - i\bar{e_1}$, $f_3 = e_2 + \bar{e_2}$ et $f_4 = ie_2 - i\bar{e_2}$.

a. Montrer que $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

b. Soit Q la matrice de passage de la base canonique dans $\mathcal{C}$. Montrer que

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

c. Si vous ne l'avez pas déjà fait donner une telle matrice Q.

6. Soit B une matrice de $M_4(\mathbb{R})$ dont le polynôme caractéristique est $X^4 + 2X^2 + 1$. Montrer que B est semblable à l'une des matrices

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$