Documents et calculatrices interdits, téléphones portables éteints et rangés

Trois heures

Questions de cours. *Les questions sont indépendantes.*

1. Donner une norme de $M_n(\mathbb{R})$ pour laquelle les éléments du groupe orthogonal, $O_n(\mathbb{R})$, sont tous de normes 1 (vous montrerez que ce que vous proposez est bien une norme).

2. Énoncer et démontrer le théorème de décomposition des noyaux (on se limitera au cas de deux polynômes).

3. Soit f un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel de dimension n. Montrer que l'indice de nilpotence de f est inférieur ou égal à n.

Exercice I. **1.** Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables.

2. Donner la forme normale de JORDAN des matrices

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Donner la forme normale de JORDAN, J, de la matrice E ainsi qu'une matrice de passage $P \in GL_4(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}EP = J$:

$$E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice II. **1.** Soit A une matrice de $SU_2(\mathbb{C})$.

a. Montrer A est diagonalisable dans une base hermitienne et que ses valeurs propres sont de module 1 et inverses l'une de l'autre : $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ où θ est un réel.

b. Donner la valeur de θ en fonction de la trace de A.

2. Déduire des questions précédentes que si A et B sont deux matrices de $SU_2(\mathbb{C})$ les assertions suivantes sont équivalentes

1. A et B sont semblables ;
2. A et B ont même trace ;
3. A et B ont les mêmes valeurs propres ;
4. A et B sont conjugués dans $SU_2(\mathbb{C})$.

3. **a.** Montrer que toute matrice de $SU_2(\mathbb{C})$ est de la forme $\begin{pmatrix} u & -\bar{v} \\ v & \bar{u} \end{pmatrix}$ où u et v sont deux nombres complexes tels que $|u|^2 + |v|^2 = 1$.

b. Soit $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}$ les parties réelles et imaginaires de u et v respectivement ($u = u_1 + iu_2$ et $v = v_1 + iv_2$). Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & SU_2(\mathbb{C}) & \to & \mathbb{S}^3 \\ & \begin{pmatrix} u & -\bar{v} \\ v & \bar{u} \end{pmatrix} & \mapsto & (u_1, u_2, v_1, v_2) \end{array}$$

est un homéomorphisme. *(Ici $\mathbb{S}^3$ est la sphère unitaire euclidienne dans $\mathbb{R}^4$.)*

Exercice III. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Donner le polynôme caractéristique de A, ses valeurs propres complexes et leurs multiplicités (algébriques et géométriques).

2. Montrer que les sous-espaces propres E_i et E_{-i} associés aux valeurs propres i et $-i$ respectivement sont conjugués.

3. Montrer que les sous-espaces caractéristiques N_i et N_{-i} associés aux valeurs propres i et $-i$ respectivement sont conjugués.

4. Montrer qu'il existe des vecteurs e_1 et e_2 de $\mathbb{C}^4$ tels que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \bar{e_1}, \bar{e_2})$ est une base de $\mathbb{C}^4$ et si P est la matrice de passage entre la base canonique et $\mathcal{B}$ alors

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

5. Soit $f_1 = e_1 + \bar{e_1}$, $f_2 = ie_1 - i\bar{e_1}$, $f_3 = e_2 + \bar{e_2}$ et $f_4 = ie_2 - i\bar{e_2}$.

a. Montrer que $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

b. Soit Q la matrice de passage de la base canonique dans $\mathcal{C}$. Montrer que

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

c. Si vous ne l'avez pas déjà fait donner une telle matrice Q.

6. Soit B une matrice de $M_4(\mathbb{R})$ dont le polynôme caractéristique est $X^4 + 2X^2 + 1$. Montrer que B est semblable à l'une des matrices

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$