Exercice I. En utilisant leur forme normale de JORDAN calculer les puissances n-ièmes des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & \log_a b & \log_a c \\ \log_b a & 1 & \log_b c \\ \log_c a & \log_c b & 1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice II. On pose $F := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

1. Donner la forme normale de JORDAN, J, de F et donner une matrice de passage P telle que $J = P^{-1}FP$.

On définit la suite de FIBONACCI $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par les conditions :

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \ \ \varphi_{n+2} = \varphi_{n+1} + \varphi_n.$$

2. Démontrer par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $\begin{pmatrix} \varphi_{n+1} \\ \varphi_n \end{pmatrix} = F^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. Donner le terme général de (φ_n).

Exercice III. (Exponentielle sur les matrices)

1. Soit $\|.\|$ une norme sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie E. Montrer que la norme d'opérateur sur $\mathcal{L}(E)$:

$$\forall f \in \mathcal{L}(E), \quad \|f\|_{\text{op}} = \sup\{\|f(x)\|; x \in E, \|x\| = 1\}$$

est une norme d'algèbre.

2. Soit $J_{\lambda,r}$ le bloc de JORDAN de taille r et de valeur propre λ. Calculer $\exp(J_{\lambda,r})$ et pour tout scalaire t, $\exp(tJ_{\lambda,r})$.

3. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, montrer que $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & M_n(\mathbb{R}) \\ t & \mapsto & \exp(tA) \end{array} \right.$ est $\mathcal{C}^\infty$ de dérivée $\frac{d}{dt}\exp(tA) = A\exp(tA)$.

4. Résoudre l'équation différentielle

$$y''' = 6y'' - 12y' + 8y, \quad y(0) = 1, \ y'(0) = -1, \ y''(0) = 3.$$

Exercice IV. **1.** Montrer que deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ sont semblables dans $M_n(\mathbb{C})$ si, et seulement si, elles sont semblables dans $M_n(\mathbb{R})$.

On considère dans la suite de l'exercice $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{C}^n$. Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ une valeur propre complexe d'une matrice réelle $A \in M_n(\mathbb{R})$.

2. Montrer que $\bar{\lambda}$ est une valeur propre de A et que les sous-espaces propres $E_\lambda^{\mathbb{C}}$ et $E_{\bar{\lambda}}^{\mathbb{C}}$ sont conjugués.

Soit $E_{\lambda,\bar{\lambda}}^{\mathbb{R}} = (E_\lambda^{\mathbb{C}} + E_{\bar{\lambda}}^{\mathbb{C}}) \cap \mathbb{R}^n$

3. Montrer que $E_{\lambda,\bar{\lambda}}^{\mathbb{R}}$ est invariant par A et que $\dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda,\bar{\lambda}}) = 2\text{mult}_{\text{géom}}(\lambda) = 2\dim_{\mathbb{C}}(E_\lambda^{\mathbb{C}})$.

4. Montrer qu'il existe une base $u_1, v_1, u_2, v_2 \dots, u_g, v_g$ de $E_{\lambda,\bar{\lambda}}^{\mathbb{R}}$ telle que

$$Au_i = \text{Re}(\lambda)u_i + \text{Im}(\lambda)v_i \text{ et } Av_i = -\text{Im}(\lambda)u_i + \text{Re}(\lambda)v_i.$$

Donner la matrice de la restriction de A à $E_{\lambda,\bar{\lambda}}^{\mathbb{R}}$ dans cette base.