Exercice 1. Montrer que

1. $< a, b \,|\, a^2 = b^2 = 1 >$ n'est pas $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$;

2. $< a, b \,|\, a^{-1}ba = b^2,\ b^{-1}ab = a^2 >= 1$;

3. (groupe du nœud de trefle) $G = \langle a, b \mid a^2 = b^3 \rangle$ est infini, non abélien ;

4. (groupe de Baumslag-Solitar) $\mathrm{BS}(1, 2) =< a, b \,|\, b^{-1}ab = a^2 >= \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \rtimes \mathbb{Z}$;

5. $< a, b \,|\, ab^2 = ba^2 >= F_2 \rtimes \mathbb{Z} =< a, \beta_1, \beta_2 \,|\, a\beta_1 a^{-1} = \beta_2,\ a\beta_2 a^{-1} = \beta_1\beta_2 >$;

6. (difficile) $< a, b, c \,|\, b^{-1}ab = a^2,\ c^{-1}bc = b^2,\ a^{-1}ca = c^2 >= 1$.

Exercice 2. **1.** Montrer que le groupe fondamental de la bouteille de Klein a un sous-groupe d'indice deux qui est le groupe fondamental du tore.

2. Interpréter ce résultat en montrant (géométriquement) que le tore est un revêtement de la bouteille de Klein.

Exercice 3. Décrire (à conjugaison près dans le groupe des isométries du plan) tous les groupes d'isométries du plan qui agissent proprement discontinuement cocompactement. Même question avec l'espace euclidien à trois dimensions.

Exercice 4. On considère le groupe des tresses à n brins

$$B_n = \langle a_1, \ldots, a_{n-1} \mid a_i a_j = a_j a_i,\ a_i a_{i+1} a_i = a_{i+1} a_i a_{i+1}, i = 1, \ldots, n-2,\ |i - j| > 1 \rangle$$

1. Montrer que les transpositions $\sigma_i = (i, i+1)$ de S_n vérifient les relations ci-dessus. En déduire qu'il existe un morphisme $\pi\ : B_n \to S_n$, on appelle PB_n le noyau de π.

2. Montrer que $\varphi(a_i) = 1$ définit un morphisme $\varphi\ : B_n \to \mathbb{Z}$.

3. En considérant les égalités ${a_i}^{-1} a_j = a_j a_i {a_j}^{-1} {a_i}^{-1}$ pour $|i - j| = 1$ et ${a_i}^{-1} a_j = a_j {a_i}^{-1}$ pour $|i - j| > 1$, montrer par récurrence sur la longueur des mots que tout élément de B_n s'écrit $u.v^{-1}$ où u et v sont des mots **positifs**, c'est-à-dire des éléments du monoïde libre sur $\{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$.

On vérifiera que la procédure qui à partir d'un mot w calcule u et v est algorithmique. Cette « forme normale » est-elle unique ?

4. (difficile) Montrer que si un mot de la forme précédente $u.v^{-1}$ est nul alors en appliquant la procédure ci-dessus à $v^{-1}u$ on trouve le mot vide.

5. En déduire que le groupe de tresse à un problème des mots décidable.