Croissance des groupes nilpotents

Pour un groupe G on définit les séries centrales descendantes et ascendantes par

$$\gamma_0(g) = G, \quad \gamma_{i+1}(G) = [G, \gamma_i(G)] \quad \text{et} \quad \zeta_0(G) = \{1\}, \quad \zeta_{i+1}(G) = Z(G/\zeta_i(G))$$

où $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ est le commutateur des éléments x et y, $Z(G)$ est le centre de G.

On note que $\gamma_1(G) = G'$ le sous-groupe dérivé et que $\zeta_1(G) = Z(G)$ le centre de G.

Un groupe G est **nilpotent** si il existe c tel que $\gamma_c(G) = \{1\}$ ou de manière équivalente si $\zeta_c(G) = G$. Le plus petit tel c est appelé **classe de nilpotence** de G.

Résultats généraux sur les groupes nilpotents

1. Montrer que les deux définitions sont bien équivalentes.

2. Montrer que $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ où l'action est la mulitplication par -1, n'est pas nilpotent.

3. Montrer que pour tout entier i, $\gamma_i(G)$ et $\zeta_i(G)$ sont distingués (ils sont même caractéristiques).

4. Montrer que $\begin{array}{rcl} G/G' \otimes \gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G) & \to & \gamma_{i+1}(G)/\gamma_{i+2}(G) \\ xG' \otimes y\gamma_{i+1}(G) & \mapsto & [x, y]\gamma_{i+2}(G) \end{array}$ défini un morphisme surjectif de groupes abéliens.

5. Déduire de la question précédente que pour G un groupe nilpotent de classe c et de type fini, pour tout entier i, $\gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G)$ est un groupe abélien de type fini. Montrer qu'une partie S de G engendre G si et seulement si elle engendre G/G'.

Croissance de $\mathbf{UT}_n(\mathbb{Z})$

On considère le groupe $\mathrm{UT}_n(\mathbb{Z})$ des matrices unitaires triangulaires supérieures.

6. Montrer qu'il est nilpotent de classe $n-1$, décrire les séries centrales ascendantes et descendantes.

7. Montrer qu'il est engendré par les matrices $A_i = I_n + E_{i,i+1}$, $1 \leq i \leq n-1$, où E_{ij} est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la i-ième ligne et de la j-ième colonne qui est égal à 1.

8. Montrer par récurrence sur k que si $M = A_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots A_{i_k}^{\epsilon_k}$ avec $\epsilon_i = \pm 1$ (c'est à dire si M est un élément de longueur plus petite que k) alors les coefficients m_{ij} de M sont tels que

$$|m_{ij}| < k^{|i-j|}.$$

9. En déduire qu'il y a au plus $k^{n-1+2(n-2)+\cdots+n-1}$ éléments de $\mathrm{UT}_n(\mathbb{Z})$ de longueur inférieure à k : la fonction croissance de $\mathrm{UT}_n(\mathbb{Z})$ est polynômiale.

Action d'un groupe nilpotent sur un arbre simplicial

Soit φ un Un **automorphisme** d'un arbre simplicial $T = (V, E, i, t, ^{-})$ est consitué de deux permutations : φ_V de l'ensemble V des sommets de T et φ_E de l'ensemble E des arêtes qui sont compatibles avec les applications t, i et $^{-}$ et qui sont sans inversions : $\varphi(e) \neq \bar{e}$ pour toute arête e.

Pour un automorphisme φ d'un arbre simplicial T, on définit l'axe de φ par

$$\mathrm{Axe}(\varphi) = \{v \in V \mid \varphi(v) \in [v, \varphi^2(v)]\} \cup \{e \in E \parallel i(e), t(e) \in \mathrm{Axe}(\varphi)\},$$

et on rappelle que l'ensemble fixe de φ est

$$\mathrm{Fix}(\varphi) = \{x \in V \cup E \parallel \varphi(x) = x\}.$$

10. Montrer que $\mathrm{Fix}(\varphi)$ est un sous-arbre de T.

11. Montrer que si φ a au moins un point fixe, alors $\mathrm{Axe}(\varphi) = \mathrm{Fix}(\varphi)$. Dans ce cas on dit que φ est **elliptique**.

12. Montrer que pour tout sommet v tel que $v \neq \varphi^2(v)$, le milieu de $[v, \varphi^2(v)]$ appartient à $\mathrm{Axe}(\varphi)$.

13. Montrer que si φ n'a pas de points fixes alors $\mathrm{Axe}(\varphi)$ est une ligne biinfinie sur laquelle φ agit par translation. Dans ce cas on dit que φ est **hyperbolique**.

14. Montrer que si φ et ψ sont deux automorphismes elliptiques qui commutent alors $\mathrm{Fix}(\varphi) \cap \mathrm{Fix}(\psi) \neq \emptyset$.

15. Montrer que si φ et ψ sont deux automorphismes hyperboliques qui commutent alors $\mathrm{Axe}(\varphi) = \mathrm{Axe}(\psi)$

16. Montrer que si φ est un automorphisme elliptique et ψ est un automorphisme hyperbolique et que φ et ψ commutent alors $\mathrm{Axe}(\psi) \subseteq \mathrm{Fix}(\varphi)$

17. Montrer que si $\mathbb{Z}$ agit sur un arbre simplicial T sans inversion alors soit l'action a un point fixe globale (et on dit que l'action est **triviale**), soit il existe une ligne biinfinie $\mathrm{Axe}(\mathbb{Z})$ sur laquelle $\mathbb{Z}$ agit par translation.

18. Montrer qu'un groupe nilpotent qui agit sur un arbre simplicial sans inversion possède soit un point fixe globale (et on dit que l'action est triviale), soit agit par translation sur une ligne biinfini $\mathrm{Axe}(G)$