**Exercice 1.** On rappelle d'abord que les isométries positives du demi-plan de Poincaré sont les homographies $\varphi : \ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $ad - bc = 1$. On note que cette homographie est définie par la classe de la matrice $M_\varphi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ (et que cette classe a deux éléments).

Montrer que $\varphi$ est hyperbolique si, et seulement si, $|\mathrm{trace}(M_\varphi)| > 2$, parabolique si, et seulement si, $|\mathrm{trace}(M_\varphi)| = 2$ et elliptique si, et seulement si, $|\mathrm{trace}(M_\varphi)| < 2$.

Dans les trois cas, donner les éléments géométriques (points fixes, axe) de $\varphi$.

Donner aussi une homographie (positive) qui conjugue $\varphi$ en l'une des trois exemples typiques (homothétie centrée en 0, translation, rotation du disque de Poincaré).

**Exercice 2. Métriques plates sur le tore.** Soit $(T, d)$ un tore métrique plat (c'est-à-dire que chaque point de $T$ a un voisinage isométrique à un disque du plan euclidien, et que $T$ est topologiquement un tore). On rappelle que le revêtement universel de $(T, d)$ est le plan euclidien $\mathbb{E}^2$ que l'application de revêtement $p$ est une isométrie locale et que le groupe fondamental $\pi_1(T) = \mathbb{Z}^2$ de $T$ agit sur $\mathbb{E}^2$ par isométries. On rappelle enfin que le groupe des isométries du plan euclidien se décompose en :

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{E}^2) = \mathbb{R}^2 \rtimes O_2(\mathbb{R})$$

où $\mathbb{R}^2$ est le groupe des translations de $\mathbb{E}^2$ et $O_2(\mathbb{R})$ est le groupe orthogonal.

**1.** Montrer que l'action de $\pi_1(T)$ est par translations.

**2.** Montrer que l'image de $\pi_1(T)$ dans $\mathbb{R}^2$, le groupe des translations de $\mathbb{E}^2$, est un réseau (c'est-à-dire un sous-groupe discret de rang 2), bien défini à conjugaison par les éléments de $\mathrm{Isom}(\mathbb{E}^2)$ près.

**3.** Montrer que deux tores plats sont isométriques si, et seulement si, ils correspondent à la même classe de conjugaison de réseaux de $\mathbb{R}^2$.

On désigne par $\mathrm{Mod}(T)$ l'espace des modules de $T$ : $\mathrm{Mod}(T)$ est l'ensemble des tores métriques plats à isométrie et à homothéties près. Les questions précédentes permettent d'identifier $\mathrm{Mod}(T)$ à l'ensemble des classes de conjugaison (dans $\mathrm{Isom}(\mathbb{E}^2)$) de réseaux de $\mathbb{R}^2$ à homothétie près.

**4.** Soit $x \in \mathrm{Mod}(T)$. Montrer qu'il existe un réseau $A \in x$ et des générateurs $u$ et $v$ de $A$ ($A = \mathbb{Z}u \oplus \mathbb{Z}v$) tels que $u = (1, 0)$, $v = (a, b)$ avec $\|v\| \geq 1$, $|a| \leq \frac{1}{2}$ et $b > 0$.

On identifie $\mathbb{R}^2$ avec le plan complexe et on désigne par

$$D = \{z = a + ib \mid |z| \geq 1, \ |a| \leq \frac{1}{2}, \ b > 0\}.$$

**5.** Soit $u = 1$, $v_1, v_2 \in D$, ,$v_1 \neq v_2$, $A_1 = \mathbb{Z}u \oplus \mathbb{Z}v_1$ et $A_2 = \mathbb{Z}u \oplus \mathbb{Z}v_2$. Montrer que $A_1$ et $A_2$ représentent le même point de l'espace des modules si, et seulement si, $v_1$et $v_2$ sont sur le bord de $D$ et sont symétriques par rapport à l'axe imaginaire.

**6.** Déduire des deux questions précédentes qu'on a défini une bijection entre $\mathrm{Mod}(T)$ et $D/\!\sim$ où $\sim$ est l'identification des points du bord par la symétrie axiale par rapport à l'axe imaginaire.

Ceci permet de voir l'espace des modules comme une variété : en mettant sur $D$ la topologie induite par la topologie de $\mathbb{R}^2$. De plus si on met sur $D$ la métrique du demi-plan de

Poincaré alors $\mathrm{Mod}(T)$ est une variété hyperbolique avec deux singularité : les images de $i$ et $e^{i\frac{\pi}{3}}$, c'est-à-dire que ces deux points n'ont pas de voisinages isométriques à un disque de $\mathbb{H}^2$, ce sont des points coniques d'angles respectifs $\pi$ et $\frac{2\pi}{3}$.

**7.** Montrer que topologiquement l'espace des modules $\mathrm{Mod}(T)$ est une sphère privée d'un point.

**Exercice 3. Espace de Teichmüller[1] du tore.** Soit $T_0 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ le tore plat munit de la métrique $d_0$ induite par la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^2$.

**1.** Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ agit sur $T_0$ par homéomorphismes.

Soit $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$ les deux vecteurs de base de $\mathbb{R}^2$. Soit $H$ le demi-plan de Poincaré et $v \in H$. On considère $A_v = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}v$ et $(T_v, d_v)$ le tore plat $T_v = \mathbb{R}^2/A_v$ munit de la métrique $d_v$ induite par la métrique euclidienne sur $\mathbb{R}^2$. On considère l'homéomorphisme

$$\begin{array}{rccc} \rho_v \ : & T_0 & \to & T_v \\ & (x_1, x_2) & \mapsto & x_1 e_1 + x_2 v \end{array}$$

**2.** Montrer que $\rho_v$ est linéaire c'est-à-dire qu'elle envoie les géodésiques locales sur les géodésiques locales.

L'espace de Teichmüller

$$\mathcal{T}(T_0) = \{\rho \ : T_0 \to (T,d)\}/\sim$$

où $(T,d)$ est un tore métrique plat, $\rho$ un homéomorphisme linéaire (qui préserve les géodésiques locales) et où deux homéomorphismes $\rho, \rho'$ sont équivalents si il existe une homothétie $f$ entre $(T,d)$ et $(T',d')$ telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dd, "f"] \\ T_0 \arrow[ur, "\rho"] \arrow[dr, "\rho'"'] & \\ & T' \end{tikzcd}$$

(L'espace de Teichmüller est en général plutôt présenté comme l'espace des homéomorphismes $\rho$ en n'exigeant pas qu'ils soient linéaires – ce qui évite d'avoir besoin de fixer une métrique sur $T_0$ – mais on quotiente alors en n'exigeant pas que le diagramme soit commutatif mais que ${\rho'}^{-1} \circ f \circ \rho$ soit une isotopie de $T_0$. L'approche choisie ici permet de traiter le cas du tore sans parler d'isotopie.

Il est un peu abusif de parler d'espace de Teichmüller pour le tore, c'est un cas trop facile et connu depuis longtemps. Les vrais espaces de Teichmüller sont définis pour les variétés hyperboliques.)

**3.** Montrer que tout élément de $\mathcal{T}(T)$ a un représentant de la forme $\rho_v$ pour un vecteur $v$ du demi-plan de Poincaré.

Soit $\varphi \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et $\rho$ un un élément de $\mathcal{T}(T_0)$. On définit $\varphi_*(\rho) = \rho \circ \varphi^{-1}$.

**4.** Montrer que pour tout $v \in H$, $\varphi_*(\rho_v) = \rho_{\varphi(v)}$, où $\varphi(v)$ est l'image de $v$ par l'homographie associée à la matrice $\varphi$.

[1] Oswald TEICHMÜLLER était un nazi qui a joué un rôle important dans l'expulsion des mathématiciens juifs de l'univerité de Göttingen en 1933 et qui est mort sur le front de l'Est sous l'uniforme de la la Wermacht en 1943. Il me semble peu approprié de continuer à honorer sa mémoire en donnant son nom à un objet mathématique. C'est malheureusement l'usage.

L'espace de Teichmüller est donc en bijection avec le demi-plan de Poincaré. On munit donc $\mathcal{T}(T_0)$ de la métrique hyperbolique du demi-plan de Poincaré. On a montré à la question précédente que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ agit par isométrie sur $\mathcal{T}(T_0)$.

**5.** L'espace de Teichmüller $\mathcal{T}(T_0)$ est-il un revêtement de l'espace des modules $\mathrm{Mod}(T)$ ?

**Exercice 4. Transformation Anosov du tore.**

Soit $(T_0, d_0)$ le tore plat : $T_0 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ munit de la distance $d_0$ induite par la métrique euclidienne sur $\mathbb{R}^2$.

Soit $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

**1.** Montrer que $\varphi$ a deux valeurs propres $\lambda_\pm = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ associées aux vecteurs propres $u_-$ et $u_+$ respectivement.

On considère le lacet géodésique local $\begin{array}{rccl} \gamma : & [0,1] & \to & T_0 \\ & t & \mapsto & \gamma(t) = (t, 0) \end{array}$.

**2.** Dessiner dans $T_0$, $\gamma$, $\varphi(\gamma)$, $\varphi^2(\gamma)$ etc.

**3.** Montrer que, dans un sens que l'on essayera de préciser, $\varphi^n(\gamma)$ converge vers la géodésique locale $\begin{array}{rccl} \gamma_\varphi : & \mathbb{R} & \to & T_0 \\ & t & \mapsto & \gamma(t) = tu_+ \end{array}$.

**Exercice 5. Isométries d'un arbre réel.** *(Comparer avec les questions 10 à 13 de la feuille de TD 6.)*

On considère un arbre réel $T$ c'est à dire un espace géodésique 0-hyperbolique.

**1.** Montrer, en utilisant que les triangles géodésiques sont 0-minces, qu'il y a un unique segment géodésique entre deux points de $T$.

**2.** *(peu utile pour la suite et délicat)* Montrer qu'entre deux points de $T$, il y a un unique arc (chemin injectif) et que celui-ci est géodésique.

**3.** Montrer, en utilisant que les triangles géodésiques sont 0-fins, que pour tous $x, y, z \in T$, $[x,y] \cap [x,z] \cap [y,z]$ est un singleton $\{c\}$ le centre du tripode $x, y, z$. On note $(y.z)_x = (x.y)_z = (x.z)_y = c$ ce centre.

Soit $\varphi$ une isométrie de $T$ sans points fixes.

Soit $x \in T$ et $c$ le centre de $x, \varphi(x), \varphi^2(x)$.

**4.** Montrer que $c \in [\varphi^{-1}(c), \varphi(c)]$.

**5.** Montrer par récurrence que $\begin{array}{rcl} \mathbb{Z} & \to & T \\ n & \mapsto & \varphi^n(c) \end{array}$ est une isométrie.

On définit $\mathrm{Axe}(\varphi) = \cup_{n\in\mathbb{Z}}[\varphi^n(c), \varphi^{n+1}(c)]$.

**6.** Montrer que $\mathrm{Axe}(\varphi)$ est isométrique à $\mathbb{R}$ (c'est une géodésique bi-infinie).

**7.** Montrer que $\varphi$ agit sur son axe par translation. On note la longueur de cette translation par $\|\varphi\|$.

Pour tout point $y$ de $T$ on définit $p(y)$ le projeté de $y$ sur $\mathrm{Axe}(\varphi)$, c'est à dire l'unique point $y$ de $\mathrm{Axe}(\varphi)$ tel que $[y, p(y)] \cap \mathrm{Axe}(\varphi) = \{p(y)\}$.

**8.** Montrer que $p(y)$ existe, est unique et réalise le minimum de la distance entre $y$ et les points de $\mathrm{Axe}(\varphi)$.

**9.** Montrer que pour tout $y \in T$,

$$d(y, \varphi(y)) = 2d(y, \mathrm{Axe}(\varphi)) + \|\varphi\|.$$

**10.** En déduire l'axe de $\varphi$ est l'ensemble des points $y \in T$ tels que $d(y, \varphi(y))$ est minimal et que ce minimum est $\|\varphi\|$. Montrer alternativement que l'axe de $\varphi$ est l'ensemble des points $y \in T$ tels que $\varphi^{-1}(y)$, $y$ et $\varphi(y)$ sont alignés.

**11.** Montrer qu'une isométrie d'un arbre réel qui n'a pas de points fixes possède exactement deux points fixe sur $\partial T$ : les extrêmités de son axe. Autrement dit, un arbre réel n'a pas d'isométries paraboliques.

Pour être complet sur ce sujet, on suppose maintenant que $\varphi$ est une isométrie elliptique de $T$, c'est-à-dire que $\varphi$ a au moins un point fixe.

**12.** Montrer que l'ensemble des points fixes $\mathrm{Fix}(\varphi)$ de $\varphi$ est un sous-arbre de $T$

**13.** Montrer que

$$\forall x \in T,\ d(x, \varphi(x)) = 2d(x, \mathrm{Fix}(\varphi)).$$

**14.** Montrer que $\mathrm{Fix}(\varphi)$ est l'ensemble des points $y \in T$ tels que $\varphi^{-1}(y)$, $y$ et $\varphi(y)$ sont alignés.

### Exercice 6. groupes quasi-isométriques à $\mathbb{Z}$.

Montrer qu'un groupe de type-fini quasi-isométrique à $\mathbb{Z}$ est virtuellement $\mathbb{Z}$ c'est-àdire qu'il contient un sous-groupe d'indice fini isomorphe à $\mathbb{Z}$.

*(C'est un résultat très classique et qui aurait pu être dans mon cours, si j'avais eu plus de temps. Vous trouverez ce résultat démontré dans toutes les références sur les groupes hyperboliques. Pour être un vrai exercice il faudrait quelques questions intermédiaires, j'essayerai de les ajouter.)*