

Combinatoire des groupes et géométrie  
hyperbolique

Thierry COULBOIS

31 août 2005



# Chapitre 1

## Groupe(s) libre(s)

### 1.1 Mots

- 1.1 Alphabet, mots, concaténation, monoïdes libres
- 1.2 Inverses, mots réduits, groupes libres
- 1.3 Propriété universelle des groupes libres
- 1.4 Un groupe libre est exactement déterminé par le cardinal d'une base (le rang)
- 1.5 Les groupes libres sont sans torsion
- 1.6 Conjugaison, mots cycliquement réduits
- 1.7 Problème des mots et de conjugaison
- 1.8 Tout groupe est quotient d'un groupe libre
  
- 1.a Un commutateur est produit de carrés
- 1.b Un commutateur s'écrit de manière réduite  $X^{-1}Y^{-1}Z^{-1}XYZ$
- 1.c Groupes abéliens libres, sous-groupes
- 1.d Topologie profinie (c'est une topologie séparée, complétion et compacité)

### 1.2 Graphe de CAYLEY

- 1.9 Définition
- 1.10  $\mathbb{Z}$
- 1.11  $\mathbb{Z}^2$
- 1.12  $S_3$
- 1.13 distance et longueur
- 1.14 Le graphe de Cayley d'un groupe libre est un arbre (simplicial)
- 1.15 Structure topologique, métrique du graphe de Cayley
- 1.16 Action du groupe sur le graphe de Cayley

### 1.3 Longueurs et transformations de Nielsen

1.17 Conditions de Nielsen

1.18 Tout sous-groupe de type fini d'un groupe libre est libre

1.19 Si  $a_1, \dots, a_n$  engendrent un groupe libre de rang  $n$ , alors  $a_1, \dots, a_n$  est une base

1.20 Sous-groupes engendrés par deux éléments

1.21 Centralisateurs et normalisateurs dans le groupe libre

1.22 Un groupe libre est commutatif transitif

1.e Sous-groupe libre de  $SL_2(\mathbb{Z})$

### 1.4 Nielsen-Schreier

1.23 Tout sous-groupe d'un groupe libre est libre

1.24 Graphe de Cayley relatif, automate

1.25 propriété de Howson, conjecture d'Hanna Neumann

1.f Théorème de M. Hall

### 1.5 Action sur un arbre

1.26 Définition des arbres simpliciaux à la Bass-Serre

1.27 Un groupe qui agit librement sur un arbre simplicial est libre

## Chapitre 2

# Groupe fondamental

- 2.1 Le groupe fondamental d'un graphe est libre
- 2.2 Le groupe fondamental des boucles d'oreilles hawaïennes n'est pas libre

### 2.1 Définition

- 2.3 Chemin, lacet
- 2.4 Homotopie, classe d'homotopie
- 2.5 Groupe fondamental
- 2.6 Groupe fondamental du cercle
- 2.7 Groupe fondamental d'un produit cartésien
- 2.8 Homomorphisme
- 2.9 Homotopie des espaces
- 2.10 Équivalence d'homotopie
- 2.a  $\pi_1(SO_3(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
- 2.b Groupes de tresses comme groupe fondamental

### 2.2 Revêtements

- 2.11 Définition
- 2.12 Relevé d'un chemin
- 2.13 Groupe fondamental d'un revêtement
- 2.14 Action du groupe fondamental sur les fibres, sur le revêtement
- 2.15 Revêtement universel
- 2.16 Le revêtement universel d'un graphe est un arbre
- 2.17 Domaine fondamental

2.c Revêtement universel du tore

2.d Orientation

## 2.3 Sous-groupes du groupe libre

## 2.4 Espace quotient

## Chapitre 3

# Groupes de présentation finie

### 3.1 Définition

- 3.1 Générateurs et relations
- 3.2 Transformations de Tietze
- 3.3 Sous-groupes d'indice fini

- 3.a Groupe de tresse  $B_3$
- 3.b  $BS(1,2)$

### 3.2 Algorithmique

- 3.4 Problèmes du mot, de conjugaison
- 3.5 Les groupes à une relation ont un problème des mots décidable
- 3.6 Invariance par changement de présentation
- 3.7 Problème de trivialité, d'isomorphisme
- 3.8 Existence de groupes de présentation finie avec un problème des mots non-résoluble

### 3.3 Surfaces

- 3.9 Caractéristique d'Euler, genre
  - 3.10 Classification des surfaces
  - 3.11 Groupes fondamentaux des surfaces
- 3.c Conjecture de Poincaré d'après Stallings

## 3.4 Produit libre

**3.12** Somme connexe

**3.13** Produit libre

**3.14** Produit libre amalgamé

**3.15** Extension HNN

**3.16** Formes normales

## Chapitre 4

# Espaces métriques

### 4.1 Graphes de Cayley

- 4.1 Espaces métriques
- 4.2 Structure topologique ou métrique sur le graphe de Cayley
- 4.3 Quasi-isométries
- 4.4 Changement de système de générateurs

### 4.2 Espaces géodésiques

- 4.5 Géodésiques
- 4.6 Espaces géodésiques (exemple des graphes et des espaces euclidiens)
- 4.7 Longueur d'une courbe rectifiable
- 4.8 Espace des longueurs
- 4.9 Théorème de Hopf-Rinow
- 4.10 Lemme d'Arzela-Ascoli
- 4.11 Angles

### 4.3 Espaces de courbure constante

#### 4.3.1 Espace euclidien

#### 4.12 Al-Kashi

#### 4.3.2 Géométrie sphérique

#### 4.13 Distance

4.14 Géodésiques

4.15 Angles

4.16 Loi des angles sphériques

### 4.3.3 Géométrie hyperbolique

4.17 Distance

4.18 Géodésiques

4.19 Angles

4.20 Loi des angles hyperboliques

### 4.3.4 Espaces de courbure constante

4.21 Groupes des isométries

4.22 Réflexions

## Chapitre 5

# Le plan hyperbolique

### 5.1 Disque de Klein

### 5.2 Modèles de Poincaré

5.1 Géodésiques

5.2 Triangles

5.3 Isométries, action de  $PSL_2(\mathbb{R})$

5.4 Métrique

5.5 Angles

5.6 Aires

5.7 Hexagones isocèles rectangles

### 5.3 Courbure

### 5.4 Bord du plan hyperbolique

5.8 Le cercle à l'infini

5.9 Action de  $PSL_2(\mathbb{R})$  sur  $S^1$

5.10 Métrique visuelle sur le bord

### 5.5 Structure conforme

5.11 Equivalence des métriques visuelles

5.12 Structure conforme sur le bord



## Chapitre 6

# Surfaces hyperboliques

### 6.1 Variétés riemanniennes

6.1 Définition

6.2 Métrique des longueurs

6.3 Sous-variétés

### 6.2 Revêtements

6.4 Métrique des longueurs

6.5 Variétés de courbure constante

6.6 revêtement par  $M_n^k$

### 6.3 Surfaces compactes hyperboliques

6.7 Espaces quotients, collages

6.8 Pantalons géodésiques

6.9 Les surfaces de genre plus grand que deux sont géodésiques

6.10 Action des groupes de surface sur  $\mathbb{H}_2$

### 6.4 Lemme de Svař-Milnor

### 6.5 Espace de Teichmüller

6.11 Structures métriques à courbure constante

**6.12** Groupe modulaire

**6.13** Représentant géodésique d'une classe d'homotopie de lacets

**6.14** Paramétrisation par les coutures de pantalons

## Chapitre 7

# Groupes hyperboliques

### 7.1 Bords des groupes

- 7.1 Espace des bouts
- 7.2 Le bord d'un groupe libre est un Cantor
- 7.3 Théorème de Stallings
- 7.4 Métriques sur l'espace des bouts
- 7.5 Bord des groupes de surfaces

### 7.2 Espaces hyperboliques

- 7.6 Triangles  $\delta$ -fins
- 7.7 Produit de Gromov
- 7.8 Quadrilatères
- 7.9 Le plan hyperbolique est hyperbolique
- 7.10 invariance par quasi-isométrie

### 7.3 Groupes hyperboliques

- 7.11 Algorithme de Dehn
- 7.12 Les groupes hyperboliques sont de présentation finie

## 7.4 Bord des espaces et des groupes hyperboliques

**7.13** Limite de Hausdorff-Gromov

**7.14** Métriques sur le bord

**7.15** Compactification

**7.16** Topologie et structure conforme sur le bord d'un groupe hyperbolique