Université Paul-Cézanne Licence MI, S4 2006/2007

M13 – Algèbre et arithmétique

Devoir à la maison — Isométries du cube
À rendre les 2 ou 3 mai 2007

La rédaction d'un devoir à la maison est un élément fondamental de l'appréciation. De plus s'agissant de géométrie la qualité et la pertinence des dessins font partie intégrante du travail. Vous devez rendre un devoir parfaitement rédigé et présenté.

I. Le cube

Dans tout le devoir on considère un cube $ABCDEFGH$, centré en l'origine de côté 2 et dont les arêtes sont parallèles aux axes du repère. $ABCD$ est la face inférieure, $EFGH$ est la face supérieure, l'ordre alphabétique de ces deux faces correspond à l'orientation directe par rapport au troisième vecteur du repère, A et E sont les sommets antérieurs gauches de votre figure.

1. Faire une figure.
2. Donner les coordonnées des sommets du cube.
3. Donner les longueurs des diagonales des faces et des grandes diagonales du cube.

II. Les isométries du cube

Une isométrie du cube est une isométrie de l'espace euclidien qui laisse le cube globalement invariant.

1. Montrer que toute isométrie du cube laisse fixe l'origine du repère O et est donc une isométrie vectorielle.
2. Faire la liste des 48 isométries du cube (La description comportera des dessins élégants et éclairants). Préciser les isométries directes et indirectes.
3. On considère la rotation r d'axe orienté $\overrightarrow{AG}$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Donner la matrice de r, ses valeurs propres et le sous-espace propre associé à la valeur propre 1.
4. Trouver parmi les isométries du cube deux symétries orthogonales par rapport à des plans, s_1, s_2, telles que $r = s_2 \circ s_1$.
5. Montrer que la symétrie centrée à l'origine commute avec toutes les isométries du cube (on pourra raisonner en terme de matrices).

III. Groupes des isométries du cube : orbites et stabilisateurs

On note Isom(cube) le groupe des isométries du cube.

1. Montrer que quelques soient deux sommets, S, S', du cube il existe une isométrie du cube f telle que $f(S) = f(S')$ (on pourra discuter suivant que S et S' sont sur une même arête, sur une même face ou opposés).
2. Faire la liste des 6 isométries du cube qui stabilisent le sommet A.
3. Montrer que ces 6 isométries forment un sous-groupe Stab(A) de Isom(cube).
4. Montrer de même que quelques soient deux arêtes (orientées) il existe une isométrie du cube qui envoie la première sur la deuxième.
5. Faire la liste des 4 isométries qui stabilisent (globalement, c'est à dire sans nécessairement conserver l'orientation) l'arête AB.
6. Faire la liste des 8 isométries qui stabilisent (globalement) la face $ABCD$.

IV. Décomposition du groupe des isométries du cube

1. Montrer que l'on peut former deux tétraèdres réguliers T_1 et T_2 avec les sommets du cube (les dessiner).

2. En déduire qu'il existe un homomorphisme de groupes surjectif, φ, du groupe des isométries du cube vers le groupe symétrique de degré 2 (les permutations de l'ensemble $\{T_1, T_2\}$).

3. Montrer que le noyau de φ est constitué des 24 isométries du tétraèdre T_1.

4. On considère Δ_1, Δ_2 et Δ_3 les trois médianes du cube (droites joignant les centres de faces opposées). Montrer qu'il existe un homomorphisme de groupes surjectif, ψ, du groupe des isométries du cube vers le groupe symétrique de degré 3 (les permutations de l'ensemble $\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3\}$).

5. Décrire les 8 éléments du noyau de ψ, Montrer que le noyau de ψ est commutatif.

Des compléments et des figures pour ce devoir sont sur
`http://www.latp.univ-mrs.fr/~coulbois/2005/extra/index.html`