Université Paul-Cézanne Licence MI, S4 2006/2007

Algèbre et arithmétique – premier partiel

1 heure, calculatrice et documents interdits.

Question de cours (6 points). Donner la définition d'un idéal et montrer que tout idéal de $\mathbb{Z}$ est principal.

Exercice 1 *Les questions sont indépendantes.*

1) Démontrer que si a et b divisent c et si $\text{pgcd}(a, b) = 1$, alors ab divise c. Est-ce que c'est encore vrai si $\text{pgcd}(a, b) \neq 1$?
2) Soit a et b deux entiers strictement positifs, montrer que $ab = \text{ppcm}(a, b).\text{pgcd}(a, b)$.

Exercice 2

1) Donner des coefficients de Bézout pour 5 et 7.
2) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $\begin{cases} x & \equiv & 2 \mod 5 \\ x & \equiv & 4 \mod 7 \end{cases}$
3) Donner la liste des inversibles de $\mathbb{Z}/35\mathbb{Z}$.

Exercice 3

Soit $x \in]0; 1[$ un nombre réel et $x = 0, x_1x_2x_3\dots$ son écriture décimale ($x_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ et $x = x_1 10^{-1} + x_2 10^{-2} + \cdots$).
1) On suppose que l'écriture décimale de x est périodique de période ℓ, c'est-à-dire $x = x_1x_2\dots x_\ell x_1x_2\dots x_\ell x_1x_2\dots x_\ell\dots$ ou encore pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $x_{i+\ell} = x_i$. Montrer que $(10^\ell - 1)x$ est un nombre entier et que x est rationnel.
2) Réciproquement, on suppose que $x = \frac{a}{b}$ est un nombre rationnel ($a, b \in \mathbb{N}^*$, $a \wedge b = 1$ et $0 < a < b$) et que b est premier avec 10.

a) Montrer qu'il existe deux nombres entiers $i \neq j$ tels que $10^i \equiv 10^j \mod b$.
b) Montrer qu'il existe un entier strictement positif ℓ tel que $10^\ell \equiv 1 \mod b$.
c) Montrer que l'écriture de x est périodique de période ℓ.

3) Application calculer ℓ pour $b = 7$ et $b = 33$. Donner l'écriture décimale de $\frac{2}{7}$.