

## Algèbre et arithmétique – deuxième partiel

1 heure, calculatrice et documents interdits.

---

**Question de cours** (6 points). Soit  $n$  un entier. Montrer que les transpositions engendrent  $S_n$ , le groupe symétrique de degré  $n$ .

**Exercice 1** On considère  $S_5$ , le groupe symétrique de degré 5.

- 1) Lister les différentes décompositions en cycles à supports disjoints de  $S_5$ .
- 2) Préciser quelles sont les permutations de  $A_5$  ?
- 3) Donner les ordres des éléments de  $S_5$ , puis des éléments de  $A_5$ .
- 4) Soit  $G$  un groupe de cardinal  $n$  et  $k$  un diviseur de  $n$ . Existe-t-il forcément un élément d'ordre  $k$  dans  $G$  ? Justifier votre réponse.

**Exercice 2** Soit  $\alpha = (123456) \in S_6$ .

Donner les décompositions en cycles à supports disjoints, les ordres et les signatures des puissances  $\alpha^k$  de  $\alpha$ .

**Exercice 3**

Soit  $\alpha$  et  $\beta$  deux cycles de  $S_n$  dont les supports s'intersectent en exactement un indice.

- 1) Montrer que  $\alpha \circ \beta$  est un cycle dont on précisera la longueur.
- 2) Montrer que  $\alpha$  et  $\beta$  ne commutent pas.

*Pour cet exercice, une difficulté est d'introduire des notations cohérentes et compréhensibles.*