M13 - TD n°1

Arithmétique

Exercice 1

1. Écrire 57 en binaire (base 2), écrire 57 en hexadécimal (base 16), donner l'expression décimal du nombre qui s'écrit 102021 en base 3.
2. Écrire $11^o13'15''$ en décimal.
3. Montrer que pour tout entier n, 9 divise $10^n - 1$. En déduire qu'un nombre est divisible par 9 si et seulement si la somme des chiffres de son écriture décimal est divisible par 9.

Exercice 2

On considère x et y deux entiers relatifs et d un diviseur commun. On note $x = dx_1$ et $y = dy_1$.
Montrer que $d = \text{pgcd}(x, y)$ si et seulement si x_1 et y_1 sont premiers entre eux.

Exercice 3

Soit $a = 7696$ et $b = 4144$.
1. Déterminer $\text{pgcd}(a, b)$ de deux façons différentes :
– en utilisant l'algorithme d'Euclide.
– en utilisant la décomposition en nombres premiers de a et b.
2. Déterminer $\text{ppcm}(a, b)$.

Exercice 4

Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$ et $m \geq 0$.
1) On suppose que a divise b dans $\mathbb{Z}$. Montrer que a^m divise b^m pour tout exposant m.

2) Soit p un nombre premier divisant a^m. Montrer que p divise a. Est-ce toujours vrai si p n'est pas premier ?

3) Démontrer que si a et b divisent c et si $\text{pgcd}(a, b) = 1$, alors ab divise c. Est-ce que c'est encore vrai si $\text{pgcd}(a, b) \neq 1$?

Exercice 5

On appelle **nombres premiers jumeaux** un couple $(p, p + 2)$ formé de deux nombres premiers.

a) Donner 4 exemples de tels couples.
b) Démontrer que si p est un nombre premier ≥ 5 tel que $p + 2$ soit également premier alors $p + p + 2$ est divisible par 12.

Exercice 6

1) On se donne $p_1, p_2, \ldots, p_n$ des nombres premiers. Montrer que le nombre $q = (p_1 p_2 \cdots p_n) + 1$ n'est divisible par aucun des p_i. En déduire une démonstration de l'infinité des nombres premiers (c'est ainsi qu'a raisonné Euclide).

2) Existe-t-il trois nombres premiers de la forme $p, p + 2, p + 4$?

Exercice 7

1. Donner la liste des diviseurs de 3528.

2. Soit $a = 2^3 \times 3^2 \times 13^2$.
a). Calculer le nombre de diviseurs de a sans les écrire.
b). Ecrire la forme générale d'un diviseur de a. Donner alors une expression factorisée de la somme des diviseurs de a.
c). Généraliser les deux questions précédentes pour $b = p_1^{\alpha_1} \times \cdots \times p_n^{\alpha_n}$ où les p_i sont premiers et distincts deux à deux et les $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 8

On appelle **nombre parfait** un entier naturel n tel que la somme de ses divisuers stricts soit égale à lui-même. Par exemple, $6 = 1 + 2 + 3$ et $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$ sont des nombres parfaits.

Soit p un nombre tel que $2^p - 1$ soit premier. Montrer que $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ est un nombre parfait.

Exercice 9

Soit $a \in \mathbb{Z}$. Montrer qu'on a

i) $\text{pgcd}(14a + 3, 21a + 4) = 1$.
ii) $\text{pgcd}(9a + 4, 2a - 1) = 1$ ou 17.

Exercice 10

1. Montrer qu'il n'existe pas d'entiers a et b premiers entre eux tels que $a^2 = 2b^2$. Que pouvez-vous en déduire concernant le nombre $\sqrt{2}$?

2. Montrer que $\frac{\ln 7}{\ln 5}$ est irrationnel.

Exercice 11

On appelle *Nombre de Fermat* un entier de la forme $F_n = 2^{2^n} + 1$, où $n \geq 0$ est un entier.

i) Calculer F_0, F_1, F_2, F_3 et F_4. Montrer qu'ils sont premiers.
ii) Montrer que 641 divise F_5 (on doit ce résultat à Euler. On pourra utiliser le petit théorème de Fermat).
iii) Si $2^m + 1$ est un nombre premier, montrer que $m = 2^n$ (donc que $2^m + 1$ est un nombre de Fermat).

Exercice 12

1. On se propose de résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ des équations de la forme (E) $ax + by = 1$ où a et b sont deux entiers relatifs.
a) Montrer que si (x_0, y_0) est une solution particulière de (E) alors toutes les solutions de (E) sont de la forme $(x_0 - kb, y_0 + ka)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation $314x - 159y = 1$.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ puis dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, l'équation $39x + 21y = 6$.

Exercice 13

Le $x$ème jour du $y$ème mois de l'année $1900 + z$, un bateau ayant u hélices, v cheminées et w hommes d'équipage a fait naufrage. L'âge du capitaine, qui venait d'être grand père, était N. On donne la relation,

$$\sqrt[3]{N} + uvwxyz = 11\,888\,815.$$

Calculer toutes les inconnues. (On utilisera le fait que les inconnues sont des nombres entiers et on tiendra compte du sens donné à chacune d'elles, par exemple $1 \leq x \leq 31$).