Université Paul-Cézanne — Licence MI, S4 2006/2007

M13 - TD n°3

Bijections – Permutations – Groupes

Exercice 1

1) Montrer que la composée de deux applications injectives est injective.
2) Montrer que la composée de deux applications surjectives est surjective.
3) Donner un exemple (en dessinant un diagramme cartésien) d'une application injective et d'une application surjective dont la composée n'est ni injective ni surjective.

Exercice 2

Soit n un entier positif.
1) Soit $b \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Montrer que l'application $\mathrm{add}_b \ : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ x & \mapsto & x+b \end{array}$ est une bijection et donner sa bijection réciproque.
2) Pour tous $b, b' \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, montrer que $\mathrm{add}_b \circ \mathrm{add}_{b'} = \mathrm{add}_{b+b'}$.
3) À quelle condition sur $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, l'application $\mathrm{mult}_a \ : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ x & \mapsto & ax \end{array}$ est-elle une bijection, dans ce cas donner une bijection réciproque.
4) Pour $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^\times$ et $b \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, montrer que l'application $\mathrm{aff}_{a,b} \ : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ x & \mapsto & ax+b \end{array}$ est une bijection.
5) Pour $a, a' \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^\times$ et $b, b' \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, déterminer $\mathrm{aff}_{a,b} \circ \mathrm{aff}_{a',b'}$.
6) Pour $n = 18$ trouver a et b tels que $\mathrm{aff}_{a,b}(6) = 0$ et $\mathrm{aff}_{a,b}(11) = 17$. Déterminer les points fixes de $\mathrm{aff}_{a,b}$.

Exercice 3

On considère dans l'espace euclidien orienté de dimension 3 un tétraèdre régulier $ABCD$ centré à l'origine. Dans tout l'exercice on dessinera des figures.
1) Faire la liste des vingt-quatre isométries de $\mathbb{R}^3$ qui laissent globalement fixe le tétraèdre $ABCD$.
2) Écrire la table de composition de ces isométries (on se limitera à une table comportant une isométrie de chaque type).
3) Pour chacune des vingt-quatre isométries déterminer comment elle permute les sommets.
4) Réciproquement, montrer que toute permutation de l'ensemble $\{A, B, C, D\}$, correspond à exactement une des isométries du tétraèdre.

Exercice 4

On considère σ, β et α les permutations suivantes :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 10 & 1 & 3 & 9 & 5 & 7 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 7 & 9 & 1 & 8 & 3 & 2 & 10 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les orbites et le support de ces permutations.
2. Décomposer les, en produit de cycles disjoints, puis en produit de transpositions.
3. Calculer la signature de chacune des permutations de deux manières différentes.
4. Calculer $\alpha \circ \beta$.
5. Déterminer β^{-1}.

Exercice 5

1. Ecrire tous les éléments de $\mathcal{S}_3$.
2. Ecrire la table de la loi $\circ$ dans $\mathcal{S}_3$.
3. En déduire tous les sous-groupes de $\mathcal{S}_3$.

Exercice 6

1) Soit $n \geq 2$. On veut montrer par récurrence que les transpositions $(1,2),(1,3),\ldots,(1,n)$ engendrent le groupe $\mathcal{S}_n$.
a) Initialiser la récurrence.
b) Soit $n \geq 2$, supposons la propriété vraie au rang $n-1$ et considérons $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Appliquer d'abord l'hypothèse de récurrence dans le cas où $\sigma(n) = n$. Puis, si $\sigma(n) = i$ avec $i \neq n$ considérer $(1,n) \circ (1,i) \circ \sigma$ pour se ramener au cas précédent.
2) Montrer que $\forall i \in \{1,\ldots,n-1\}$, $(1,i+1) = (1,i) \circ (i,i+1) \circ (1,i)$ et en déduire par récurrence sur i en utilisant la question précédente que $(1,2),(2,3),\ldots,(n-1,n)$ engendrent le groupe $\mathcal{S}_n$.
3) Montrer la **relation de tresse** : $\forall i \in \{1,\ldots,n-2\}$

$$(i,i+1)(i+1,i+2)(i,i+1) = (i+1,i+2)(i,i+1)(i+1,i+2).$$

Exercice 7

1) Dans $\mathcal{S}_6$ décomposer en cycles toutes les puissances des permutations (1234), (12345) et (123456).
2) Soit dans $\mathcal{S}_n$ un cycle σ de longueur ℓ ($\ell \leq n$).
a. Supposons que $\ell = rs$, déterminer le nombre de cycles et leur longueur que comporte σ^r.
b. Au contraire si $\ell \wedge r = 1$, montrer que σ^r possède un seul cycle de longeur ℓ et que σ et σ^r engendrent le même sous-groupe cyclique.

Exercice 8

Dans $\mathcal{S}_4$ on considère les éléments $\alpha = (12)(34)$ et $\beta = (13)(24)$, et N le sous-groupe qu'ils engendrent.
1) Déterminer les quatre éléments de N et dresser sa table de Cayley. Montrer que les éléments de N commutent.
2) Montrer que les éléments de N sont exactement les éléments d'ordre divisant 2 et de signature 1.
3) Soit $\sigma \in \mathcal{S}_4$, montrer que pour tout élément ρ de $\mathcal{S}_4$, $\sigma\rho\sigma^{-1}$ et ρ ont même ordre et même signature.
4) En déduire que pour $\sigma \in \mathcal{S}_4$ et $\rho \in N$, $\sigma\rho\sigma^{-1} \in N$. *(On dit que N est distingué dans $\mathcal{S}_4$.)*
5) Déterminer une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_4$ telle que $\sigma\alpha\sigma^{-1} = \beta$ et $\sigma\beta\sigma^{-1} = \alpha$

Exercice 9

1) Soit $c = (a_1, c_2, \ldots, a_\ell)$ un cycle de $\mathcal{S}_n$. Soit σ un élément de $\mathcal{S}_n$. Montrer que $\sigma c\sigma^{-1}$ est un cycle dont on précisera la longueur et le support.
2) Soit $d = (b_1, b_2, \ldots, b_\ell)$ un autre cycle de même longueur, donner une permutation σ tel que $\sigma c\sigma^{-1} = d$.
3) En utilisant l'exercice 6 montrer que si un sous-groupe distingué de $\mathcal{S}_n$ contient une transposition alors il est égal à $\mathcal{S}_n$.
4) Montrer que A_5 est simple