M13 - TD n°4

Groupes – Anneaux

Exercice 1

On définit sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ la loi de composition interne $\star$:

$$(x,y)\star(x',y') = (xx'-yy', xy'+x'y)$$

1. Montrer que $(\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\},\star)$ est un groupe commutatif.
2. Montrer que ce groupe est isomorphe à $(\mathbb{C}\backslash\{0\},.)$.

Exercice 2

1. Soient $(G,.)$ un groupe et a,b deux éléments de G. Vérifier que les équations $a.x=b$ et $y.a=b$ ont une unique solution.
2. Soit E un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne associative $\star$ telle que
$$\forall (a,b)\in E^2, \exists (x,y)\in E^2 \ a\star x = y\star a = b$$
Montrer que $(E,\star)$ est un groupe.

Exercice 3

Soit $(G,.)$ un groupe dans lequel chaque élément est son propre symétrique. Montrer que ce groupe est abélien.

Exercice 4

Soit $(G,.)$ un groupe, H et K deux sous-groupes de G. Montrer que $H\cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H\subset K$ ou $K\subset H$.

Exercice 5

1. Soit G un groupe et $g\in G$. On note $C_G(g)=\{x\in G | gx=xg\}$ le **centralisateur de** g.
a) Montrer que $C_G(g)$ est un sous-groupe de G.
b) Calculer $C_{S_3}((123))$ et $C_{S_4}((12)(34))$.
2. On note $Z(G)=\{x\in G \mid \forall g\in G \ gx=xg\}=\cap_{g\in G}C_G(g)$ le **centre de** G.
a) Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G.
b) Déterminer $Z(S_3)$ et $Z(GL_2(\mathbb{R}))$.

Exercice 6

Soit G un groupe. Pour tout élément $g\in G$ on note $\begin{array}{rccl}\varphi_g : & G & \to & G \\ & x & \mapsto & \varphi_g(x)=gxg^{-1}\end{array}$.

1) Montrer que pour tout $g\in G$, φ_g est un automorphisme de G.
2) Soit $\begin{array}{rccl}\varphi : & G & \to & \mathrm{Aut}(G) \\ & g & \mapsto & \varphi(g)=\varphi_g\end{array}$
a) Rappeler que $\mathrm{Aut}(G)$ est un groupe.
b) Montrer que φ est un homomorphisme de groupe.
c) Montrer que $\ker\varphi = Z(G)$.
3) Montrer que pour $G=S_3$, φ est un isomorphisme.
4) Déterminer $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

Exercice 7

1) Écrire la table de multiplication d'un groupe $(G, .)$ de cardinal 2, puis d'un groupe de cardinal 3.
Montrer que ces groupes sont uniques à isomorphismes près.
2) Quelles sont les tables de multiplication possibles pour un groupe de cardinal 4 ?
Donner l'ordre des éléments dans chacun des cas.
3) Montrer que si $\varphi\ : G \to G'$ est un homomorphisme de groupes et que g est un élément de G d'ordre fini, alors l'ordre de $\varphi(g)$ est fini et divise l'ordre de g.

Exercice 8

Soit U l'ensemble des **racines de l'unité de** $\mathbb{C}$:

$$U = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{N}, z^n = 1\}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère

$$U_n = \{z \in \mathbb{C}/z^n = 1\}$$

1) Montrer que U et U_n sont des sous-groupes multiplicatifs de $\mathbb{C}$.
2) Déterminer les éléments de U_n, pour tout n.
3) a. Soit $\omega = \mathrm{e}^{2i\pi/n}$. Quel est l'ordre de ω dans $(U_n, .)$?
b. En déduire que $< \omega >= U_n \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
4) Soit z un élément de U_n, $z = \mathrm{e}^{2ik\pi/n}$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Démontrer que l'ordre de z est égal à $\frac{n}{pgcd(n,k)}$.
5) Citer les éléments de U_4 en précisant leur ordre respectif.

Exercice 9

1) Montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un anneau.
2) Montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est intègre si et seulement si n est premier et que dans ce cas c'est un corps.
3) Montrer que les idéaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont de la forme $m\mathbb{Z}$ pour m un diviseur de n.
4) Soit A un anneau et I un idéal de A. Montrer que les idéaux de A/I sont de la forme J/I où J est un idéal de A qui contient I.

Exercice 10

On considère $C(\mathbb{R}) = \{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
1) Montrer que $C(\mathbb{R})$ est un sous-anneau commutatif de $M_2(\mathbb{R})$.
2) Montrer que $C(\mathbb{R})$ est un corps.
3) Calculer J^2.
4) Montrer que $C(\mathbb{R})$ est isomorphe à C et préciser l'isomorphisme.

Exercice 11 **Extensions quadratiques**.

On considère $\mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.
1) Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ est un anneau commutatif intègre et unitaire.
2) On considère $N\ : \mathbb{Z}[\sqrt{3}] \to \mathbb{Z}$ tel que $N(a + b\sqrt{3}) = |a^2 - 3b^2|$.
a) Montrer que $\forall z, z' \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$, $N(zz') = N(z)N(z')$.
b) En déduire que $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ n'est pas un corps.
c) N est-il un homomorphisme d'anneau ?
d) Montrer que $U = \{z \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}] \mid N(z) = 1\}$ est le groupe des unités de $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$. Donner quelques éléments de U.
4) Montrer que si z divise z' alors $N(z)$ divise $N(z')$. La réciproque est-elle vraie ?